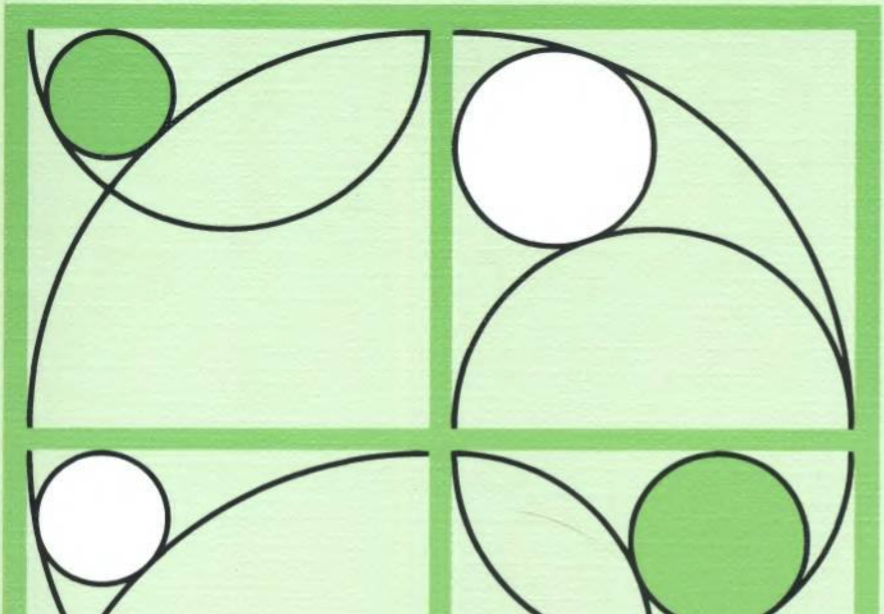
М. А. Волчкевич

Уроки геометрии в задачах

7–8 классы



М. А. Волчкевич. Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы

М. А. Волчкевич

Уроки геометрии в задачах
7—8 классы

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 514.112
ББК 22.151.0
В68

Волчкевич М. А.

В68 Уроки геометрии в задачах. 7—8 классы. — М.: МЦНМО, 2016. — 200 с.
ISBN 978-5-4439-1016-1, 978-5-4439-1015-4 (общ.)

Книга обобщает авторский опыт преподавания геометрии в нескольких московских школах. В ней много рисунков — это сильно экономит время на уроках. Перед каждым параграфом дается справочный материал — формулировки основных теорем и определения.

Материал каждой темы строится по классическому принципу: от простого к сложному. Первые задачи доступны каждому школьнику, последние достигают уровня серьезных математических олимпиад. Около половины всех задач авторские. Подборка к каждой теме выстроена так, чтобы показать содержащийся в ней метод со всех сторон. Данная книга составлена именно для работы на уроках, поэтому решений в ней нет, только ответы.

Книга предназначена для школьников, преподавателей математики, студентов педагогических вузов и университетов.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-4439-1016-1
ISBN 978-5-4439-1015-4 (общ.)

Оглавление

Предисловие

Зачем в школе нужна геометрия, что она дает детям? Спросите прилежную ученицу: «Чем вы занимаетесь на уроках геометрии?» Она вам ответит: «Мы доказываем». Ответ этот, при всей его наивности, бьет в самую точку — именно на уроках геометрии впервые возникает в школе необходимость доказательства теоремы, какой-либо истины, идея доказательства вообще. Но геометрия учит не только этому. Она учит вычислять, строить фигуры, давать определения. Отличать свойства и признаки, делать красивые чертежи и главное — дополнительные построения. Проведи несколько линий — и трудная задача вдруг станет легкой, очевидной. Древние греки в таких случаях просто говорили: «Смотри!» Недаром греческие слова *теория* и *театр* восходят к общему корню.

Нигде кроме геометрии нет такого разнообразия красивых фактов и задач, для получения которых нужно лишь немного теории. Это похоже на игру в шахматы — знание основных теорем здесь подобно лишь умению делать ходы фигурами, то есть правилам игры. Любая содержательная задача — это уже комбинация, сопоставление фактов, в ней всегда нужно сделать несколько ходов.

Видя это разнообразие, родители учеников часто задают мне один вопрос: «Нельзя ли почитать какой-нибудь учебник, решить из него несколько хороших и правильных задач и научиться всему этому побыстрее?» Слыша такое, я всегда улыбаюсь: ровно тот же вопрос задавал две тысячи лет назад египетский царь Птолемей великому Евклиду. Ответ Евклида давно уже стал афоризмом: «В геометрии нет царского пути!» Я готов подтвердить, что не существует списка из ста таких задач. Над списком из тысячи я бы уже подумал. Единственное, что тут можно сделать, — это устроить так, чтобы ребята решали много хороших задач и делали это с удовольствием для себя. Наверное, так же учат иностранные языки, учатся музыке, да и любому содержательному умению.

* * *

Как устроена эта книга? По сути, она обобщает мой опыт преподавания геометрии в математических классах нескольких московских школ за последние 15 лет. В ней много рисунков — и это не случайно. Картинка всегда воспринимается человеком на порядок быстрее, чем любой текст, по рисунку учитель в книге сразу найдет нужную ему задачу, а ученик быстро поймет, в чем она состоит. Рисунки экономят время на уроках, а его всегда не хватает! Перед каждым параграфом дается справочный материал — не только формулировки основных теорем, но и определения. Определения обычно трудно запоминаются школьниками, и не помешает всегда иметь их под рукой. Материал каждой темы строится по классическому принципу: от простого к сложному. Первые задачи доступны каждому школьнику, последние достигают уровня серьезных математических олимпиад. Главные задачи либо выделяются в тексте названиями, либо их номера подчеркиваются. Самые трудные задачи отмечены звездочкой. К задачам на вычисление даются ответы и указания. Данная книга составлялась мной именно для работы на уроках, и очень хорошо, если она будет на столе у каждого ученика. Поэтому в ней нет решений — только ответы. Иначе слишком велико было бы искушение у ребенка туда заглянуть! Подборка задач к каждой теме выстроена так, чтобы показать содержащийся в ней метод со всех сторон, так сказать, повернуть его разными гранями. По этой причине около половины всех задач книги оригинальны — они были специально мной придуманы как вариации основных идей для отработки ребятами необходимых навыков и умений.

* * *

Теперь несколько слов для учителей. Логика самого курса геометрии в данной книге такова, что признаки равенства прямоугольных треугольников, теорема о внешнем угле, о большей стороне и неравенство треугольника здесь доказываются без использования аксиомы параллельных, которая проходится уже во второй половине седьмого класса. То есть все эти утверждения относятся еще к абсолютной геометрии. Такой подход соответствует знаменитому старому учебнику А. П. Киселева или современному учебнику В. А. Смирнова. Аксиома параллельных, таким образом, стоит особняком — именно она отделяет геометрию Евклида от других геометрий. Пусть ребята хорошо запомнят этот ее краеугольный камень! В восьмом классе площадь проходится раньше теоремы Пифагора и подобия фигур. Мне это кажется оправданным, поскольку понятие площади очень естественно и легко воспринимается школьниками. К тому же древние греки делали именно так. Например, через площадь они легко доказывали лемму о пропорциональных отрезках или ту же теорему Пифагора. Данная книга представляет собой первую часть всего курса планиметрии, ориентированную на 7 и 8 классы. Следующая часть будет посвящена программе 9 класса и повторению планиметрии в 11 классе перед подготовкой к вступительным испытаниям.

Книга может быть эффективно использована на уроках геометрии в средней школе, особенно в классах с углубленным изучением математики. Она также подойдет для подготовки к олимпиадам, экзаменам и для самостоятельного обучения.

В заключение хочется выразить благодарность моему любимому учителю Р. К. Гордину, моим коллегам из лицея «Вторая Школа» И. Д. Жижилкину, П. В. Бибикову, А. И. Балабанову, Е. А. Дроздовой, К. В. Козеренко, И. А. Лепской, помогавшим мне советами при подготовке сборника к публикации, В. Радионову, сделавшему множество прекрасных рисунков и заметившему не меньше досадных опечаток при верстке макета, редактору О. Васильевой, тщательно выверившей тексты задач, а также Ю. Торхову, И. В. Ященко и всему издательству МЦНМО, подготовившему книгу к выходу в свет.

М. А. Волчкевич

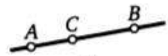
Аксиомы прямой

Аксиомы прямой

1. Для любой прямой на плоскости всегда можно взять точку, лежащую на ней, и точку, не лежащую на этой прямой.

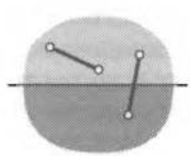
2. Через любые две точки на плоскости проходит только одна прямая.

3. Из любых трех точек на прямой только одна лежит между двумя другими.



точка *C* лежит между *A* и *B*

4. Прямая всегда разбивает плоскость на две части (полуплоскости)[1]. Если концы отрезка лежат в разных полуплоскостях, то он пересекает прямую; если же его концы принадлежат одной полуплоскости, то он ее не пересекает.



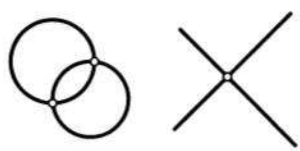
Отрезком называется множество всех точек на прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Данные точки называются *концами отрезка*. Концы отрезка также принадлежат ему.

отрезок *AB*

Лучом называется множество всех точек на прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки[2]. Данная точка называется *началом луча*. Начало луча также принадлежит ему.

луч *AB*

1. Как видно из рисунка, две окружности могут пересекаться в двух точках. Докажите, что две различные прямые могут пересекаться только в одной точке.



К задаче 1

[1] Сама прямая не входит ни в одну из полуплоскостей.

[2] Правильнее было бы сказать, что точки луча находятся в одной полуплоскости относительно любой другой прямой, проходящей через его начало.

2. Через точку на плоскости провели прямую. Докажите, что через данную точку можно провести еще одну прямую, отличную от первой.

3. Сколько существует лучей с началом в данной точке A, проходящих через данную точку B?

4. На прямой отметили три точки. Сколько всего получилось лучей с началами в данных точках?

5. На плоскости отметили четыре точки. Через любые две из них провели прямую. Сколько всего при этом могло получиться прямых? (Разберите все случаи.)

6. Нарисуйте четыре прямые так, чтобы они пересекали друг друга ровно в пяти точках.

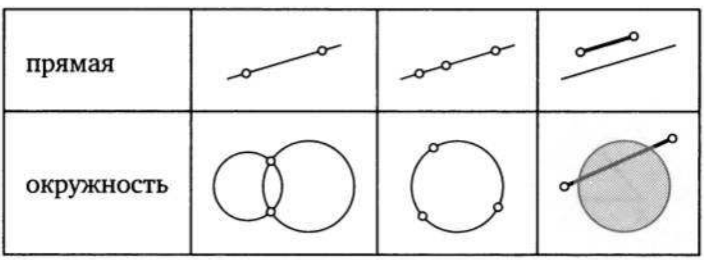
7. Могут ли семь прямых пересекаться ровно в девяти точках?

8. В каком наибольшем числе точек могут пересекаться 20 прямых?

9. В каком числе точек пересекают друг друга 15 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, если среди них есть ровно две параллельные?

10. В каком числе точек пересекаются 10 прямых, если среди них нет параллельных и ровно три из них проходят через одну точку?

11. Незнайка утверждает, что окружность — это прямая. Почему он не прав? Приведите три возражения, ссылаясь на приведенную таблицу и аксиомы.

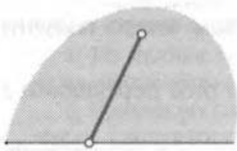


К задаче 11

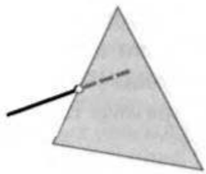
12. Отрезки AB, BC и CE пересекаются с данной прямой, а их концы не лежат на ней. Что можно сказать об отрезке AE?

13. Точка A лежит на прямой, отрезок BC пересекает прямую. Пусть M — произвольная точка на отрезке AB. Докажите, что отрезок CM пересечет прямую.

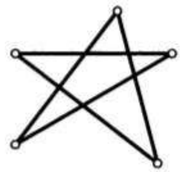
14. Фома утверждает, что точки на прямой принадлежат сразу двум полуплоскостям, границей которых является данная прямая. Какая аксиома тогда нарушается и почему?



К задаче 14



К задаче 15

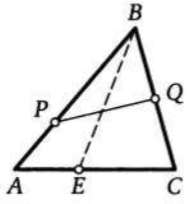


К задаче 16

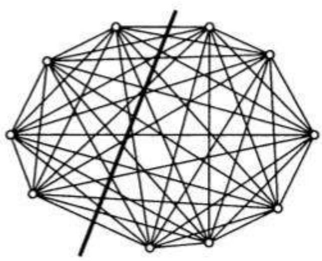
15. (Теорема.) Прямая пересекает одну сторону треугольника в точке, отличной от вершины. Докажите, что она пересечет еще одну его сторону.

16. Нарисуйте пятиугольную звезду. Проведите прямую, пересекающую все ее пять звеньев. Можно ли провести эту прямую так, чтобы она не проходила через вершины звезды? Ответ поясните.

17. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки P и Q, а на стороне AC — точку E. Докажите, что отрезок BE пересекает прямую PQ.



К задаче 17

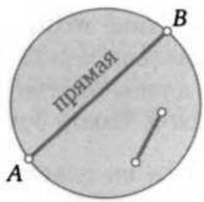


К задаче 18

18. Десять точек на плоскости попарно соединили отрезками. Прямая не проходит ни через одну из точек. Может ли она пересечь ровно 20 отрезков?

19. На плоскости отметили несколько точек и попарно соединили их все отрезками. Прямая не проходит ни через одну из точек. Оказалось, что она пересекла ровно 21 отрезок. Сколько отрезков не пересекла прямая? *Внимание: у задачи может быть несколько решений!*

20. Немецкий математик Клейн утверждал, что «плоскость» — это внутренность некоторого круга, а «прямые» на ней — отрезки с концами на окружности. Проверьте, что все пройденные нами аксиомы на такой «плоскости» выполняются. Как будет на ней выглядеть луч?



К задаче 20

Отрезки

Аксиомы отрезков

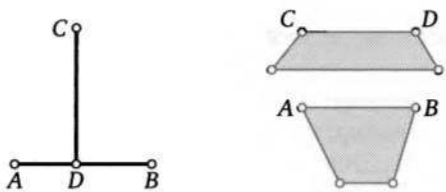
1. Любой отрезок имеет определенную меру длины, большую нуля. За единицу длины можно принять любой отрезок.

2. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

3. На любом луче от его начала всегда можно отложить отрезок заданной длины и только одним способом.

1. Как выяснить на практике толщину листа из учебника геометрии? Больше она или меньше одной десятой миллиметра?

2. Сравните «на глаз» длины отрезков AB и CD на рисунках. А теперь измерьте их линейкой. Какой больше?

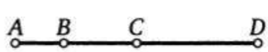


К задаче 2

3. Могут ли точки A, B и C лежать на одной прямой, если $AB = 2$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см?

4. На старой линейке все деления стерлись, случайно уцелели лишь отметки 0, 1,3 см и 1,7 см. Как с помощью такой линейки отложить отрезок длины а) 0,9 см; б) 1 см?

К задаче 4



К задаче 5

5. На прямой отметили точки A, B, C и D в указанном порядке. Известно, что $AC = 5$ см, $BD = 6$ см, $AD = 7$ см. Найдите BC.

6. Отрезок длины a разделен произвольной точкой на две части. Найдите расстояние между серединами этих частей.

7. Длина отрезка AB равна 18 см. Точки C и E лежат на данном отрезке, причем $AC:CB=3:5$, $AE:EB=5:4$. Найдите CE.

<u>8.</u> Точка C делит отрезок AB в отношении $2:3$, считая от точки A. Точка E делит отрезок BC в отношении $3:4$, считая от точки B. В каком отношении точка E делит отрезок AB?

9. Два отрезка с длинами 3 см и 5 см имеют общий конец и лежат на одной прямой. Чему может быть равно расстояние между их серединами?

<u>10.</u> Точки A, B и C лежат на одной прямой, причем $AB=2$, $AC=5$. Чему может быть равно расстояние от точки A до середины отрезка BC?

11. На прямой взяли точки A, B и C так, что $AB+BC=AC$. Докажите, что точка B обязательно лежит между A и C.

12. Точки A, B, C и E лежат на одной прямой, причем известно, что $AC+BC=AB$, $AE+CE=AC$. Какая из данных точек лежит на отрезке BE?

13. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Известно, что $AD=3$, $DC=2$, $AC=5$, $BD=8$. Найдите AB.

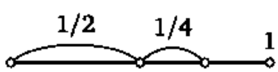
14. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AC=6$, $AB+BC=10$. Чему может быть равно BC?

<u>15.</u> Точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=10$, $AC:BC=2:3$. Чему может быть равно AC?

16. Отрезок AB делится точкой C в отношении $7:8$, а точкой E — в отношении $13:17$. Известно, что $AB=90$ см. Чему может быть равно расстояние между серединами отрезков AE и BC?

17. Точки A, B, C, D в данном порядке лежат на одной прямой. Сумма всех отрезков с концами в этих точках равна 10. Найдите AD, если $BC=2$.

<u>18.</u> Геометрически поясните, почему $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}<1$.

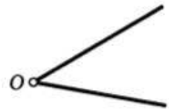


К задаче 18

***19.** Четыре дома лежат на одной прямой, причем в каждом живет по одному человеку. Где надо вырыть колодец, чтобы за водой всем вместе надо было ходить как можно меньше?

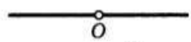
Углы

Геометрическим углом называют два луча, выходящих из одной точки. Данные лучи называются *сторонами* угла. Если стороны угла дополняют друг друга до прямой, то угол называют *развернутым*.



геометрический угол

Плоским углом называют геометрический угол вместе с одной из двух областей, на которые он делит всю плоскость.

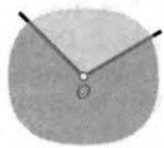


развернутый угол

Биссектрисой угла называется луч, выходящий из его вершины и делящий данный плоский угол на два угла с равной градусной мерой.

Перпендикуляром к данной прямой называется прямая, образующая при пересечении с данной прямой углы 90°.

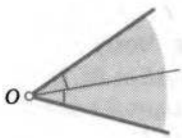
1-й плоский угол



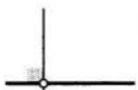
2-й плоский угол

Углы называются *смежными*, если они имеют общую сторону, а две другие их стороны дополняют друг друга до прямой.

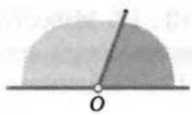
Углы называются *вертикальными*, если их стороны соответственно дополняют друг друга до двух прямых.



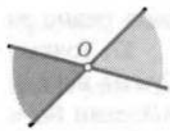
биссектриса угла



перпендикуляр



смежные углы



вертикальные углы

Аксиомы углов

1. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол по определению равен 180°.

2. Градусная мера плоского угла равна сумме градусных мер углов, на которые он делится любым лучом, выходящим из его вершины.

3. От любого луча в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только одним способом.

1. Один из двух смежных углов на 30° больше другого. Найдите величину меньшего из этих углов.

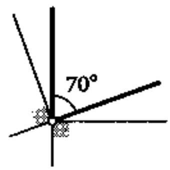
2. Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.

3. Нарисуйте произвольный треугольник. Проверьте с помощью транспортира, что один из его углов не превосходит 60°.

4. Два угла с величинами 20° и 50° имеют общую сторону. Какой угол могут образовывать две другие их стороны? (Считайте, что все углы меньше развернутого.)

5. Докажите, что из точки, лежащей на прямой, можно восстановить к ней только один перпендикуляр.

К задаче 5

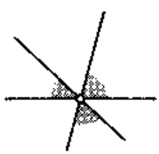


К задаче 6

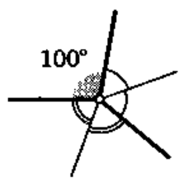
6. В вершине угла, равного 70°, восстановлены лучи, перпендикулярные к его сторонам, как показано на рисунке. Найдите угол между этими перпендикулярами.

7. (Теорема.) Докажите, что вертикальные углы равны.

8. Три прямые пересекаются в одной точке так, что отмеченные на рисунке углы равны. Найдите величину отмеченных углов.



К задаче 8

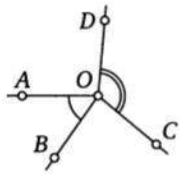


К задаче 10

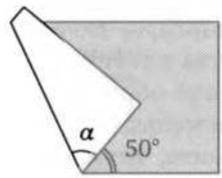
9. Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

10. Три луча выходят из одной точки и образуют три угла, каждый из которых меньше развернутого. Величина одного из них равна 100°. Найдите угол между биссектрисами двух других углов. *Внимание: у задачи может быть несколько решений!*

11. Из точки O в указанном порядке выходят лучи OA, OB, OC и OD. Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180°. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.



К задаче 11



К задаче 12

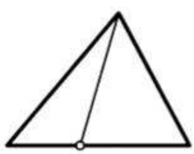
12. Лист бумаги перегнули по прямой линии и сложили так, как показано на рисунке. Один из получившихся углов оказался равен 50°. Найдите другой угол.

13. На какой угол за одну минуту поворачивается минутная стрелка часов?

14. Найдите угол между часовой и минутной стрелками в а) 9 часов 30 минут; б) в 10 часов 40 минут.

15. Найдите первый момент времени после 9:00, когда стрелки часов образуют угол 156°.

16. Предположим, что сумма углов во всех треугольниках одинакова. Используя данный чертеж, докажите, что тогда она обязана равняться 180°.



К задаче 16

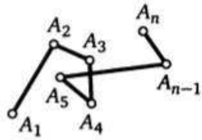
К задаче 17

17. Первый раз после 9:00 часовая и минутная стрелки исправных часов лежат на одной прямой. Что в этот момент показывает секундная стрелка?

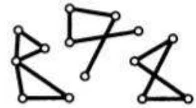
***18.** Петя измерил угол между часовой и минутными стрелками. Через полчаса он снова его измерил и оказалось, что угол не изменился! Чему мог быть равен этот угол?

Ломаные, многоугольники

Ломаной называется набор точек на плоскости, последовательно соединенных отрезками[3]. Данные отрезки — звенья ломаной, а указанные точки — ее вершины. Например, ломаная $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ состоит из отрезков A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$. При этом ломаные $A_1A_2A_3 \ldots$ $\ldots A_n$ и $A_nA_{n-1} \ldots A_3A_2A_1$ мы будем считать одной и той же ломаной.

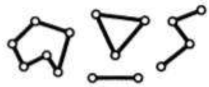


Ломаная называется *замкнутой*, если первая ее вершина совпадает с последней[4].



непростые ломаные

Ломаная называется *простой*, если из каждой ее вершины выходит не более двух звеньев, а звенья не имеют общих точек, отличных от вершин.

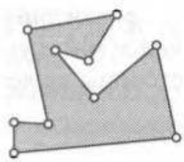


простые ломаные

Многоугольником называется простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой.

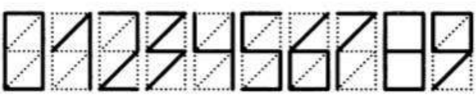
Плоский многоугольник — это многоугольник вместе со своей внутренней областью[5].

Диагональ многоугольника — отрезок, соединяющий две его вершины и отличный от стороны.



плоский многоугольник

1. Какие цифры индекса (см. на конверте) являются простыми ломаными?



К задаче 1

[3] Отрезок — тоже ломаная, но имеющая только одно звено.

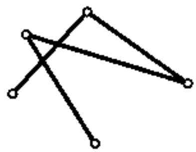
[4] В случае, когда ломаная замкнута, любую ее вершину можно считать первой. Например, ломаные $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ и $A_2A_3 \ldots A_nA_1$ — это одно и то же.

[5] То, что многоугольник разбивает плоскость на две области, — теорема. Но доказывать ее мы не будем. Внутренней областью многоугольника называют ту из областей, которая не содержит внутри себя ни одной прямой.

2. У простой ломаной 10 вершин. Сколько у нее может быть звеньев?

3. а) Сколько всего существует незамкнутых ломаных, соединяющих данные пять точек на рисунке (через каждую точку ломаная проходит только 1 раз)?

б) Тот же вопрос для замкнутых ломаных.

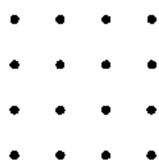


К задаче 3

4. Нарисуйте самопересекающуюся замкнутую ломаную из шести звеньев, которая каждое свое звено пересекает ровно один раз.

5. Нарисуйте самопересекающуюся замкнутую ломаную из семи звеньев, которая каждое свое звено пересекает ровно два раза.

6. Соедините 16 точек на рисунке отрезками так, чтобы получился многоугольник (не забудьте, что у многоугольника соседние стороны не лежат на одной прямой!).



К задаче 6

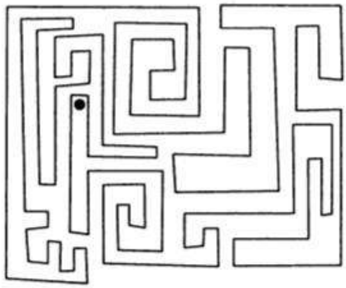
7. Могут ли четыре данные точки на плоскости быть вершинами разных четырехугольников?

8. Семь точек соединили отрезками так, что из каждой выходит ровно два отрезка. Обязательно ли они образуют замкнутую ломаную?

9. Сколько всего диагоналей у 20-угольника?

10. Число диагоналей многоугольника в четыре раза больше числа его сторон. Сколько у него вершин?

11. Во внутренней или во внешней области показанного на рисунке многоугольника находится отмеченная точка?



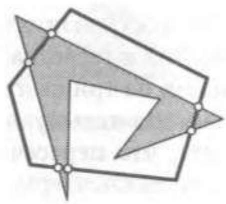
К задаче 11

12. Может ли замкнутая пятизвенная ломаная разбивать плоскость на три различные области?

13. Прямая не проходит через вершины многоугольника. Докажите, что она пересекает его в четном числе точек.

14. Какое наибольшее число сторон может иметь фигура, являющаяся пересечением треугольника и четырехугольника?

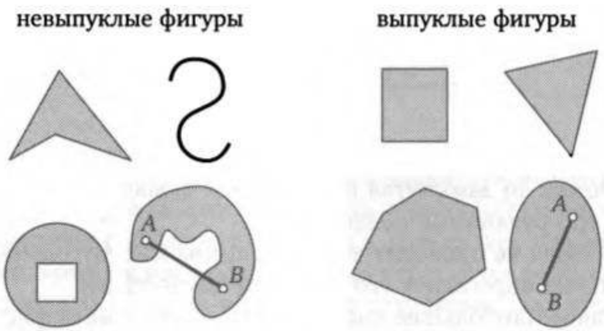
15. Два многоугольника расположены так, что вершины каждого из них не принадлежат другому. Докажите, что они пересекаются в четном числе точек.



К задаче 15

Выпуклые фигуры

1. На рисунке справа показаны различные выпуклые фигуры и отрезок, соединяющий две произвольные точки A и B одной из них. Аналогично на рисунке слева показаны невыпуклые фигуры. Исходя из этих примеров дайте определение выпуклой фигуры.



К задаче 1

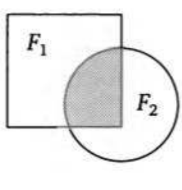
2. Являются ли выпуклыми фигурами а) отрезок; б) прямая; в) замкнутая ломаная?

3. Является ли полуплоскость выпуклой фигурой? Сформулируйте аксиому полуплоскостей в терминах выпуклых фигур.

4. Разрежьте треугольник на три выпуклых четырехугольника.

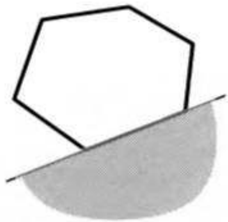
5. Разрежьте квадрат на два невыпуклых шестиугольника.

6. (Теорема.) Докажите, что пересечение двух выпуклых фигур выпукло.



К задаче 6

7. Многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. Докажите, что он выпуклый.

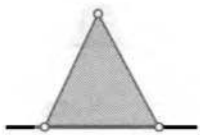


К задаче 7

8. Выпуклый лист бумаги ножницами режут по прямой. С одной из получившейся при этом частей поступают дальше так же. Докажите, что при этом способе «в обрезках» всегда будут получаться выпуклые многоугольники.

9. Докажите, что плоский угол, меньший развернутого, — выпуклая фигура.

10. Как известно, плоские четырехугольники бывают невыпуклыми. Докажите, что плоский треугольник всегда выпуклая фигура.



К задаче 10

11. Придумайте свое определение выпуклого многоугольника, отличное от того, которое было дано в задаче 7, и от общего определения выпуклой фигуры.

Равные фигуры

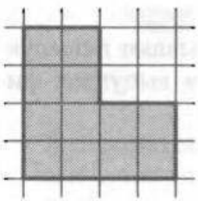
Геометрические фигуры называются *равными*, если можно одновременно совместить все точки одной фигуры с соответствующими точками другой фигуры[6].

Также будем считать, что можно совместить два отрезка равной длины и два угла с одной градусной мерой. Такие отрезки и такие углы мы будем просто называть равными.

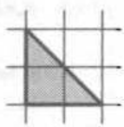
1. Приведите пример двух одинаковых по площади, но не равных фигур.

2. Разрежьте уголок, состоящий из трех квадратов, на а) две; б) три; в) четыре равные части.

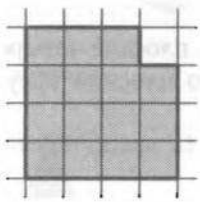
3. Разрежьте треугольник, показанный на рисунке, на четыре равные части.



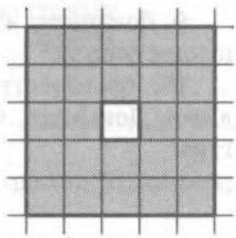
К задаче 2



К задаче 3



К задаче 5



К задаче 6

4. Разрежьте квадрат на два равных а) четырехугольника; б) пятиугольника; в) шестиугольника.

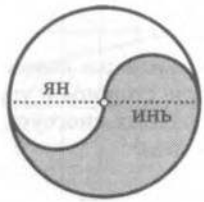
5. Из квадрата 4×4 вырезали угловую клетку. Разрежьте оставшуюся фигуру на а) три равные части; б) пять равных частей.

6. Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте полученную фигуру на две равные части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник.

---

[6] Интуитивно равные фигуры определяют как фигуры одинаковой формы и размера. Строго же математически фигуры равны, если существует *движение* плоскости, переводящее одну фигуру в другую.

7. Символ китайской философии инь-ян состоит из двух равных фигур (черной и белой), которые вместе составляют один круг. Разрежьте инь на две равные части.



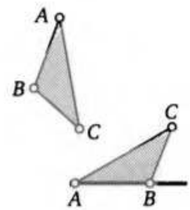
К задаче 7

***8.** Разделите фигуру, изображенную на рисунке, на две равные части.

К задаче 8

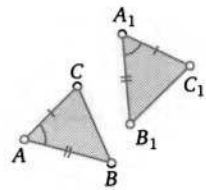
Первый признак равенства треугольников

Многоугольники называются *равными*, если можно совместить все их соответствующие стороны и углы[7]. Из определения очевидно следует, что у двух равных многоугольников соответственно равны все стороны и все углы.



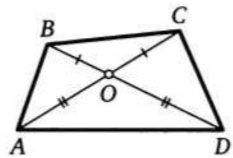
Аксиома «прикладывания треугольника к лучу». К любому лучу можно приложить треугольник, равный данному, так, чтобы первая его вершина совпала с началом луча, вторая лежала на луче, а третья оказалась в нужной полуплоскости относительно прямой, на которой лежит луч.

Данная аксиома нужна для того, чтобы при доказательствах признаков равенства треугольников была возможность прикладывать один треугольник к другому нужным нам образом — так, как если бы они были вырезаны из бумаги.



Первый признак равенства треугольников. Если две стороны и угол между ними в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу между ними в другом треугольнике, то такие треугольники равны.

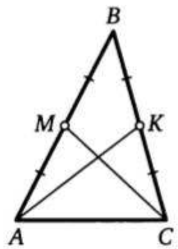
1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AO=OD$, $BO=OC$. Докажите, что $AB=CD$.



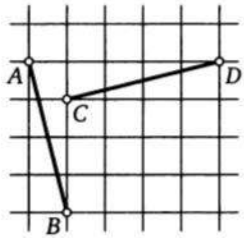
К задаче 1

[7] Для равенства треугольников достаточно того, что можно совместить все их вершины. Но уже для четырехугольников это определение не годится

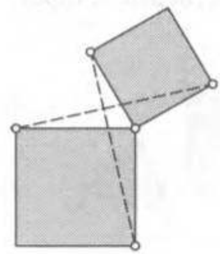
<u>2.</u> Точки M и K — середины равных сторон AB и BC треугольника ABC. Докажите, что $AK = CM$.



К задаче 2



К задаче 4



К задаче 6

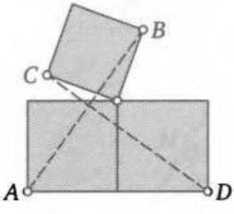
3. Все стороны и все углы пятиугольника равны. Докажите, что равны все его диагонали.

4. На клетчатой бумаге нарисовали отрезки AB и CD так, как показано на рисунке. Докажите, что они равны.

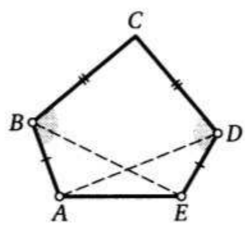
5. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите, что $\angle CAD = \angle CBD$.

<u>6.</u> Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отмеченные пунктиром на рисунке отрезки равны (по определению у квадрата все стороны равны, а углы прямые).

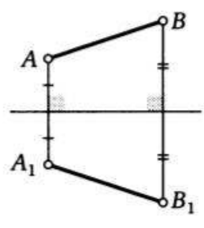
7. Три квадрата расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что отрезки AB и CD равны.



К задаче 7



К задаче 8

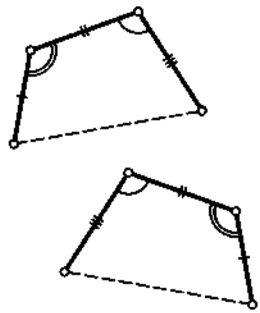


К задаче 9

8. В пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны, $AB = ED$, $BC = CD$. Докажите, что равны отрезки AD и BE.

<u>9.</u> Точки A и B отразили относительно прямой. Получились точки A_1 и B_1. Докажите, что $AB = A_1B_1$.

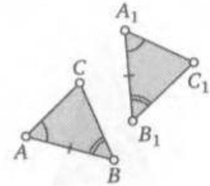
10. У двух четырехугольников соответственно равны три стороны и два угла между этими сторонами. Докажите, что у них равны и четвертые стороны.



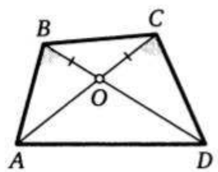
К задаче 10

Второй признак равенства треугольников

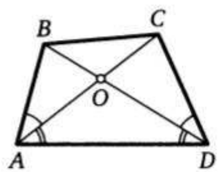
Второй признак равенства треугольников. Если два угла и сторона между ними в одном треугольнике соответственно равны двум углам и стороне между ними в другом треугольнике, то такие треугольники равны.



1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что углы ABD и ACD равны, $BO = CO$. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.



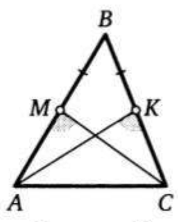
К задаче 1



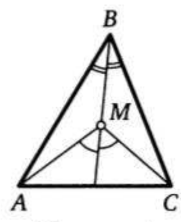
К задаче 2

2. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle CAD = \angle ADB$. Докажите, что $AB = CD$.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K так, что $\angle AMC = \angle AKC$, $BM = BK$. Докажите, что $AK = CM$.



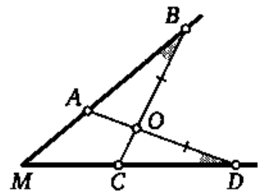
К задаче 3



К задаче 4

4. В треугольнике ABC взяли точку M так, что луч BM делит углы ABC и AMC пополам. Докажите, что данный луч перпендикулярен AC.

5. На одной стороне угла с вершиной M взяли точки A и B, а на другой — C и D, причем отрезки BC и AD пересекаются в точке O. Известно, что $BO = OD$ и $\angle OBM = \angle ODM$. Докажите, что точка O принадлежит биссектрисе угла M.



К задаче 5

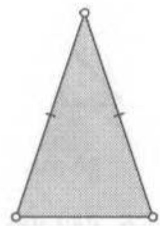
Равнобедренный треугольник

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него есть две равные стороны. Эти равные стороны называют боковыми сторонами треугольника, а третью его сторону — основанием.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы его угла от вершины до точки пересечения с противоположной стороной.

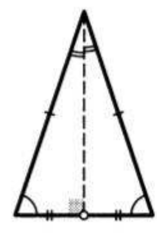
Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из его вершины на противоположную сторону, до точки пересечения с этой стороной (или ее продолжением).



Свойства равнобедренного треугольника

1. Два угла при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, совпадает с его высотой и биссектрисой



Признак равнобедренного треугольника

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

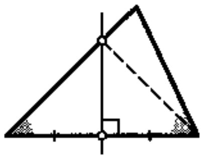
1. Докажите, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, также является его медианой и высотой.

2. (Свойство равнобедренного треугольника.) Докажите, что у равнобедренного треугольника углы при основании равны.

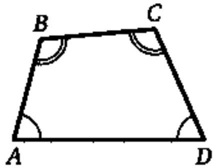
3. Биссектриса данного треугольника одновременно является его высотой. Докажите, что данный треугольник равнобедренный.

4. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что $BM = BK$.

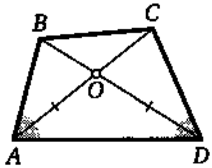
5. (Признак равнобедренного треугольника.) Два угла треугольника равны. Докажите, что он равнобедренный. *Для доказательства воспользуйтесь приведенным здесь чертежом.*



К задаче 5



К задаче 6



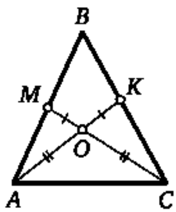
К задаче 7

6. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, причем прямые AB и CD не параллельны. Докажите, что $AB = CD$.

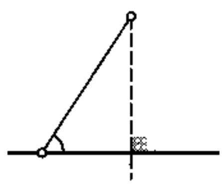
7. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $\angle A = \angle D$, $AO = OD$. Докажите, что $AB = CD$.

8. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.

9. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Оказалось, что $AO = CO$, $MO = KO$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.



К задаче 9



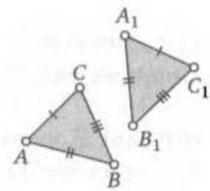
К задаче 10

10. (Существование перпендикуляра из точки на прямую.) Докажите, что из любой точки, не лежащей на прямой, можно опустить на нее перпендикуляр.

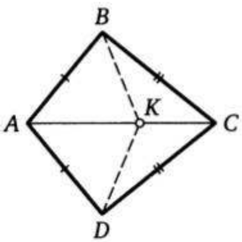
11. Две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого, а также равны их высоты, проведенные к третьим сторонам. Верно ли, что эти два треугольника равны?

Третий признак равенства треугольников

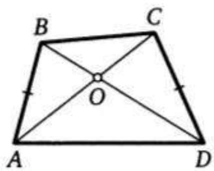
Третий признак равенства треугольников. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны[8].



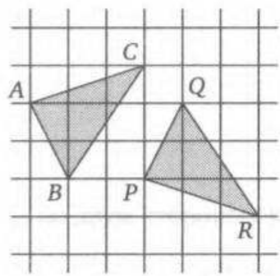
1. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$, $BC = CD$. На его диагонали AC взяли произвольную точку K. Докажите, что $BK = DK$.



К задаче 1



К задаче 2



К задаче 4

2. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Его диагонали также равны и пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = DO$.

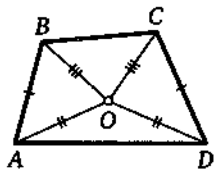
3. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Докажите, что его диагонали делятся точкой пересечения пополам.

4. Равны ли треугольники ABC и PQR, изображенные на клетчатой бумаге?

---

[8] Из этой теоремы следует, что три стороны треугольника полностью определяют его углы. Поэтому говорят, что треугольник «жесткая» фигура: невозможно изменить его углы, не меняя сторон.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Кроме того, внутри него существует такая точка O, что $AO = OD$, $BO = CO$. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.



К задаче 5

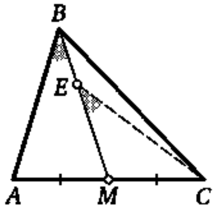
6. Все стороны и одна диагональ первого четырехугольника соответственно равны сторонам и диагонали второго. Докажите, что другие диагонали этих четырехугольников тоже равны.

Продолжение медианы на свою длину

1. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Верно ли, что он равнобедренный?

2. В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

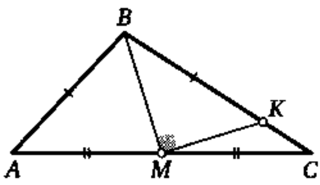
3. На медиане BM треугольника ABC взяли точку E так, что угол CEM равен углу ABM. Докажите, что отрезок EC равен одной из сторон треугольника.



К задаче 3

4. Докажите, что два треугольника равны по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

***5.** В треугольнике ABC точка M — середина стороны AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle BKM$, если $\angle A + \angle C = 70°$.

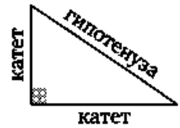


К задаче 5

***6.** В треугольнике равны две медианы. Докажите, что он равнобедренный.

Равенство прямоугольных треугольников

Треугольник называется *прямоугольным*, если один его угол равен 90°. Стороны, между которыми расположен прямой угол, называются *катетами*, противоположная от прямого угла сторона называется *гипотенузой*.



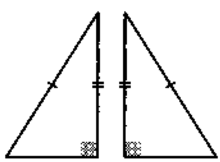
Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

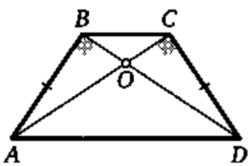
2. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого, то треугольники равны.

1. Могут ли разные прямоугольные треугольники иметь равные гипотенузы?

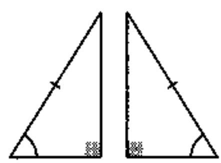
2. (Теорема.) Гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого. Докажите, что эти треугольники равны.



К задаче 2



К задаче 5



К задаче 6

3. Две высоты треугольника равны. Докажите, что он равнобедренный.

4. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведенной к другому катету.

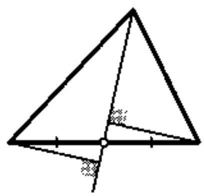
5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, углы ABD и ACD прямые, $AB = CD$. Докажите, что $AO = OD$.

6. (Теорема.) Гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого. Докажите, что эти треугольники равны.

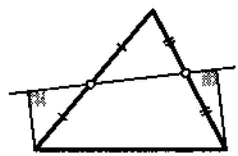
7. Докажите, что высоты, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

8. На биссектрисе угла взяли произвольную точку. Докажите, что она находится на одинаковых расстояниях от его сторон.

9. Медиана разбивает треугольник на два меньших треугольника. Докажите, что высоты этих треугольников, проведенные к этой медиане, равны.



К задаче 9



К задаче 10

10. Прямая проходит через середины двух сторон треугольника. Докажите, что высоты, опущенные на нее из концов третьей стороны треугольника, равны.

11. На стороне острого угла взяли точку. Докажите, что из нее можно опустить только один перпендикуляр на другую сторону угла.

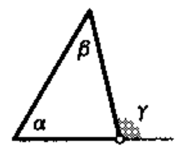
12. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и противоположному острому углу.

13. Один из острых углов прямоугольного треугольника в два раза больше другого. Докажите, что один из его катетов в два раза короче гипотенузы.

Внешний угол треугольника

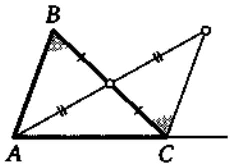
Внешим углом треугольника называют угол, смежный одному из углов треугольника. Всего у треугольника есть шесть внешних углов.

Теорема о внешнем угле. Внешний угол треугольника больше любого угла треугольника, не смежного с ним.

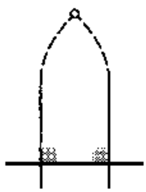


$\gamma > \alpha, \beta$

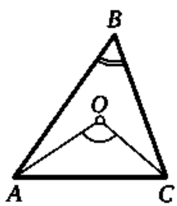
1. Используя приведенный чертеж, докажите теорему о внешнем угле. Как изменить показанное на этом чертеже построение для доказательства того, что данный внешний угол треугольника больше угла BAC?



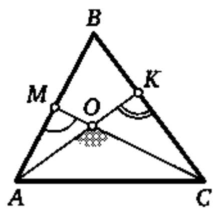
К задаче 1



К задаче 4



К задаче 5



К задаче 6

2. Могут ли в треугольнике быть два прямых угла? А два тупых?

3. Докажите, что сумма любых двух углов треугольника меньше $180°$.

4. К данной прямой проведены два перпендикуляра. Докажите, что они не могут пересекаться.

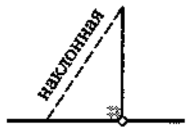
5. В треугольнике ABC взята произвольная точка O. Докажите, что $\angle AOC > \angle ABC$.

6. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли произвольные точки M и K, причем отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle AMC + \angle AKC > \angle AOC$.

Теорема о большей стороне

Теорема о большей стороне и большем угле треугольника. В треугольнике против большей стороны всегда лежит больший угол, а против большего угла лежит большая сторона.

Теорема о перпендикуляре и наклонной. Отрезок перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, короче любой наклонной, проведенной из этой точки к прямой.



1. Используя приведенный чертеж, докажите, что в любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

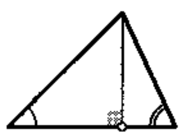
К задаче 1

2. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное предыдущей задаче.

<u>3.</u> Докажите теорему о перпендикуляре и наклонной.

<u>4.</u> На основании равнобедренного треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что отрезок, соединяющий ее с противоположной вершиной, короче боковой стороны.

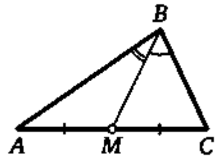
К задаче 4



К задаче 5

5. Высота делит сторону неравнобедренного треугольника на два отрезка. Докажите, что меньший из них прилегает к большему углу треугольника.

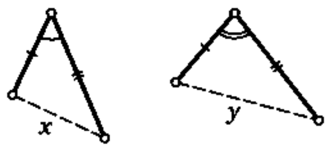
6. В треугольнике ABC провели медиану BM. Известно, что $AB > BC$. Сравните углы ABM и CBM.



К задаче 6

*7. Внутри равностороннего треугольника взяли две произвольные точки. Докажите, что соединяющий их отрезок меньше его стороны.

*8. Рассматриваются треугольники с двумя одинаковыми сторонами. Докажите, что в том из них, где больше угол между ними, больше третья сторона.



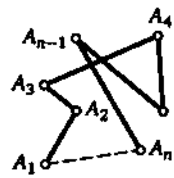
К задаче 8

Неравенство треугольника

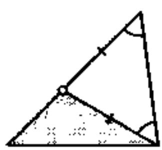
Каждому из опыта известно, что самый короткий путь между точками на плоскости идет по прямой. Оказывается, что это можно доказать, исходя из уже пройденных раньше аксиом. Ключом к данному доказательству служит так называемое

Неравенство треугольника. Сумма любых двух сторон в треугольнике всегда больше его третьей стороны.

Неравенство ломаной. Длина ломаной не может быть меньше длины отрезка, соединяющего ее начало и конец. Равенство возможно только в случае, когда все вершины ломаной лежат на данном отрезке.



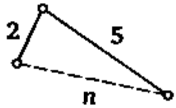
1. Используя данный чертеж, докажите неравенство треугольника.



К задаче 1

2. Докажите «неравенство трех точек»: для любых трех точек A, B, C на плоскости $AB + BC \geqslant AC$. В каком случае будет равенство?

3. Две стороны треугольника равны 2 и 5, а третья равна целому числу. Каким оно может быть?



К задаче 3

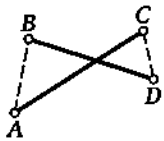
4. Одна сторона равнобедренного треугольника равна 5, а другая 12. Найдите периметр треугольника.

5. Одна сторона треугольника равна 4, а длины двух других его сторон относятся как $3:5$. Докажите, что периметр треугольника меньше 20.

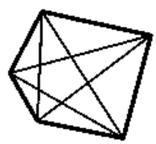
6. Разность боковых сторон треугольника равна 2, а его основание в три раза больше меньшей из них. Докажите, что периметр треугольника больше 5.

7. Внутри треугольника взяли произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от нее до вершин треугольника больше половины его периметра.

8. Отрезки AC и BD пересекаются. Докажите, что $AB + CD < AC + BD$.



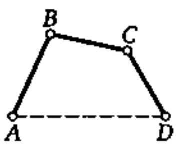
К задаче 8



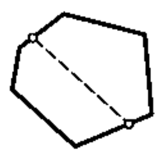
К задаче 9

9. Докажите, что сумма длин всех диагоналей выпуклого пятиугольника больше его периметра.

10. Докажите, что для произвольных точек A, B, C, D на плоскости $AB + BC + CD \geqslant AD$. В каком случае будет равенство?



К задаче 10



К задаче 13

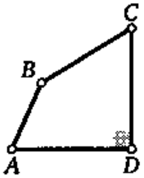
11. Докажите неравенство ломаной.

12. Три стороны четырехугольника последовательно равны 1, 5 и 2. Какие значения может принимать длина его четвертой стороны, если известно, что она является целым числом?

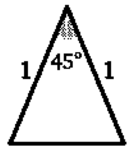
13. На сторонах многоугольника взяли две точки. Докажите, что соединяющий их отрезок меньше половины его периметра. Останется ли верным утверждение задачи, если соединить две любые точки внутри многоугольника?

14. Докажите, что сумма диагоналей любого четырехугольника меньше его периметра.

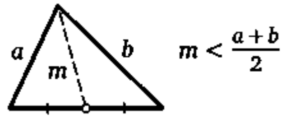
15. В четырехугольнике $ABCD$ угол D прямой. Докажите, что $CD < AB + BC$.



К задаче 15



К задаче 16

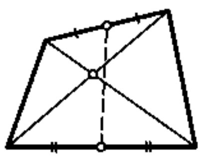


К задаче 17

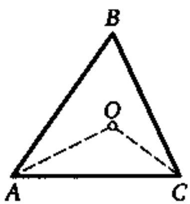
16. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, а угол между ними равен 45°. Докажите, что основание треугольника больше 1/2.

17. (Неравенство медианы.) Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух его сторон, выходящих из той же вершины.

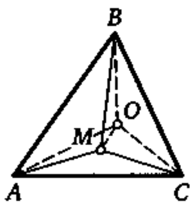
18. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, меньше полусуммы его диагоналей.



К задаче 18



К задаче 19



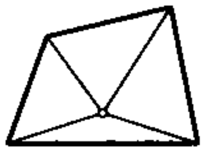
К задаче 21

19. (Неравенство «резинки».) В треугольнике ABC взята произвольная точка O. Докажите, что $AB + BC \geqslant AO + OC$.

20. В треугольнике ABC взята произвольная точка O. Докажите, что $AO + BO + CO$ меньше периметра треугольника.

21. В треугольнике ABC взяли произвольные точки O и M. Докажите, что $AM + BM + CM + OM > AO + BO + CO$.

22. Дан выпуклый четырехугольник. Где необходимо взять точку, чтобы сумма расстояний от нее до вершин четырехугольника была как можно меньше?

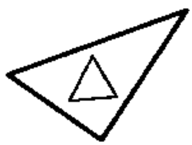


К задаче 22

*23. Докажите, что аналогичная точка для невыпуклого четырехугольника совпадает с одной из его вершин.

24. Докажите, что точка с минимальной суммой расстояний до вершин многоугольника может быть только одна.

25. Один треугольник находится внутри другого. Докажите, что его периметр меньше.



К задаче 25

26. Выведите из утверждения предыдущей задачи «правило веревки».

27. Как из бумажного треугольника вырезать четырехугольник с большим периметром?

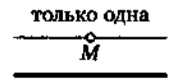
28. Все стороны четырехугольника равны. Внутри него взяли произвольную точку. Докажите, что сумма расстояний от этой точки до вершин четырехугольника меньше его периметра.

29. Может ли сумма расстояний от некоторой точки внутри выпуклого четырехугольника до его вершин быть больше периметра четырехугольника?

Параллельность. Сумма углов треугольника

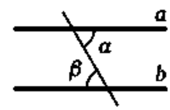
Прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Аксиома параллельных (пятый постулат Евклида). Через точку, не лежащую на прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.



Признак параллельных (теорема). Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

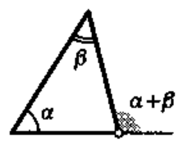
Свойство параллельных (обратная теорема). Если прямые параллельны, то любая секущая их прямая образует с ними равные накрест лежащие углы.



если $\alpha=\beta$, то $a \parallel b$
если $a \parallel b$, то $\alpha=\beta$

Теорема об углах треугольника. Сумма углов любого треугольника равна 180°.

Вторая теорема о внешнем угле. Внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних его углов.



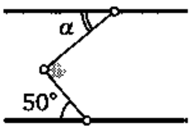
Теорема о сумме углов многоугольника. Сумма внутренних углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

1. (Транзитивность параллельности.) Докажите, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

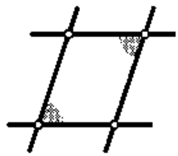
2. Прямая пересекает одну из параллельных прямых. Докажите, что она пересечет и другую.

3. К двум сторонам треугольника провели перпендикуляры. Докажите, что они пересекаются.

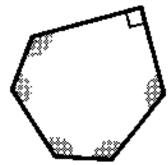
4. Сторона прямого угла образует с одной из параллельных прямых угол в 50°. Какой угол образует вторая сторона этого угла с другой параллельной прямой?



К задаче 4



К задаче 5



К задаче 9

5. Две пары параллельных прямых образуют четырехугольник. Докажите, что его противоположные углы равны.

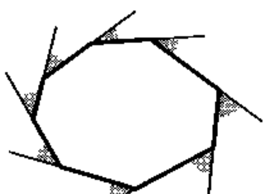
6. Противоположные стороны четырехугольника попарно равны. Докажите, что они лежат на двух парах параллельных прямых.

7. Один угол равнобедренного треугольника в два раза больше другого. Найдите углы треугольника.

8. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75°. Определите угол при основании треугольника.

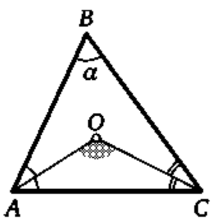
9. Один угол шестиугольника прямой, а все другие равны между собой. Найдите величину этих углов.

10. При каждой вершине выпуклого многоугольника отметили один внешний угол. Найдите сумму всех таких углов.



К задаче 10

К задаче 11



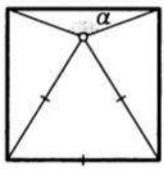
К задаче 12

<u>11.</u> Середина стороны треугольника равноудалена от всех его вершин. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

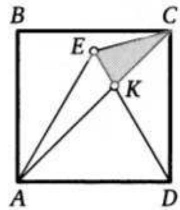
12. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Угол ABC равен α. Найдите угол AOC.

13. Угол между высотой и биссектрисой, проведенными из одного угла треугольника, равен α. Найдите разность двух других его углов.

14. На стороне квадрата внутрь его построили равносторонний треугольник. Найдите угол α на чертеже.



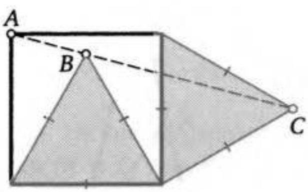
К задаче 14



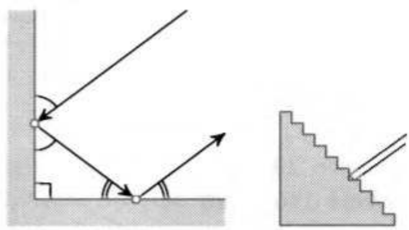
К задаче 15

15. На стороне квадрата $ABCD$ построили равносторонний треугольник AED. Диагональ AC пересекает его сторону ED в точке K. Верно ли, что треугольник CEK равнобедренный?

16. На двух сторонах квадрата построены равносторонние треугольники. Лежат ли отмеченные на рисунке точки A, B и C на одной прямой?



К задаче 16

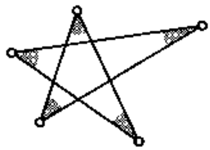


К задаче 17

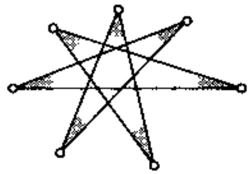
17. Луч света последовательно отражается от двух взаимно перпендикулярных зеркал. Докажите, что он «возвращается» по параллельному направлению. (Считается известным, что угол падения луча света на зеркало равен углу его отражения.)

Замечание: на этом принципе основана работа катафота или уголкового отражателя: если размеры одного «уголка» зеркальной «лесенки» малы, то катафот возвращает световой луч приблизительно туда, откуда он пришел.

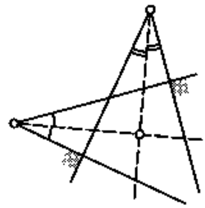
18. Чему равна сумма углов при вершинах произвольной пятиконечной звезды?



К задаче 18



К задаче 19

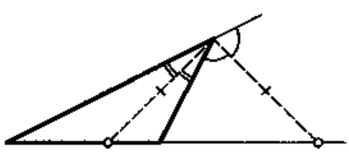


К задаче 20

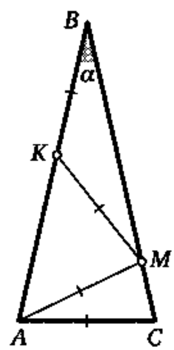
19. Тот же вопрос для такой семиугольной замкнутой ломаной, которая показана на рисунке.

20. Два угла расположены так, что их стороны взаимно перпендикулярны. Докажите, что а) величины этих углов равны; б) их биссектрисы перпендикулярны друг другу.

21. Биссектриса одного угла треугольника равна биссектрисе его внешнего угла при той же вершине (см. рисунок). Найдите разность двух других углов треугольника.



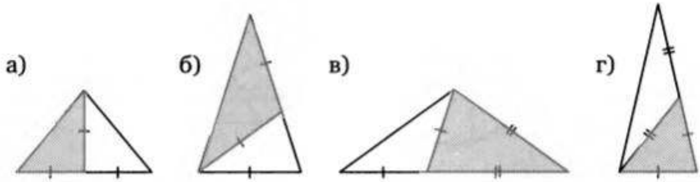
К задаче 21



К задаче 22

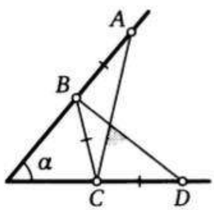
22. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяли точки M и K соответственно так, что $BK = KM = AM = AC$. Найдите угол треугольника, противоположный основанию.

23. Равнобедренный треугольник таков, что его можно разрезать на два меньших равнобедренных треугольника. На рисунках показано, как это можно сделать. Найдите углы при основаниях этих треугольников на рисунках.

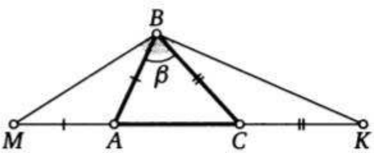


К задаче 23

<u>24.</u> На сторонах угла, равного α, взяли четыре точки A, B, C и D так, что отрезки AB, BC и CD равны (см. рисунок). Найдите угол между прямыми AC и BD.



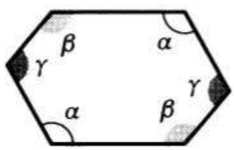
К задаче 24



К задаче 25

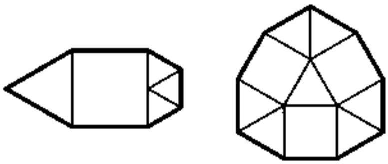
25. На продолжении стороны AC треугольника ABC отложены точки M и K так, что $AM = AB$, $CK = BC$ (см. рисунок). Найдите угол MBK, если угол $ABC = \beta$.

26. Выпуклый шестиугольник таков, что его противоположные углы попарно равны. Докажите, что противоположные стороны такого шестиугольника параллельны.



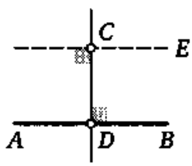
К задаче 26

***27.** На рисунке изображены выпуклые семиугольник и девятиугольник, которые можно разрезать на квадраты и правильные треугольники. Существуют ли обладающие тем же свойством выпуклые а) 10-угольник; б) 12-угольник; в) 13-угольник?



К задаче 27

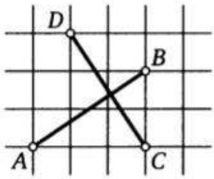
28. В чем ошибка такого «доказательства» пятого постулата: Докажем, что через точку C проходит единственная прямая, параллельная AB. Как известно, из точки C можно опустить единственный перпендикуляр CD на AB. К прямой CD можно восстановить единственный перпендикуляр CE. Прямая CE параллельна AB. Поскольку наши построения выполнены единственно возможным образом, такая прямая только одна.



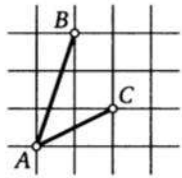
К задаче 28

Расчет углов в равных треугольниках, дополнительные построения

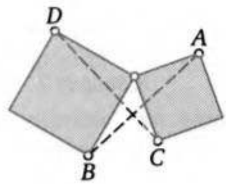
1. Докажите, что отрезки AB и CD на клетчатой бумаге перпендикулярны.



К задаче 1



К задаче 2

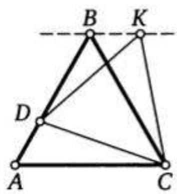


К задаче 3

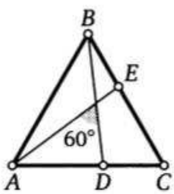
2. Найдите угол BAC, изображенный на клетчатой бумаге.

3. Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отрезки AB и CD перпендикулярны.

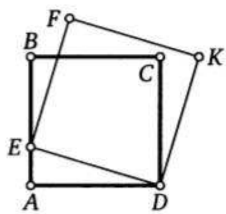
4. Равносторонние треугольники ABC и CDK расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что прямая BK параллельна AC.



К задаче 4



К задаче 5

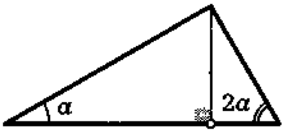


К задаче 6

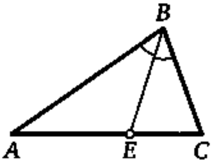
5. На сторонах равностороннего треугольника ABC взяли точки D и E так, что отмеченный на рисунке угол равен $60°$. Докажите, что отрезки AE и BD равны.

6. Квадраты $ABCD$ и $DEFK$ имеют общую вершину D, причем вершина E лежит на стороне AB. Верно ли, что точки B, C и K лежат на одной прямой?

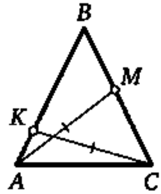
7. Один из углов треугольника в два раза больше другого. Высота, опущенная из третьего угла, делит сторону на два отрезка. Докажите, что разность этих отрезков равна одной из сторон треугольника.



К задаче 7



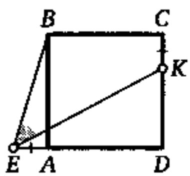
К задаче 8



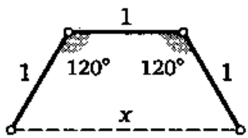
К задаче 9

8. В треугольнике ABC провели биссектрису BE. Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что один из углов треугольника в два раза больше другого.

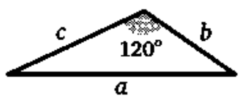
9. На боковых сторонах равнобедренного треугольника ABC взяли точки M и K так, что $AM = CK$. Может ли оказаться, что прямая MK не параллельна AC?



К задаче 10



К задаче 11



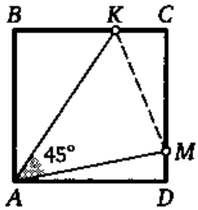
К задаче 12

10. На стороне CD и на продолжении стороны AD квадрата $ABCD$ взяли точки K и E так, что $CK = AE$. Найдите угол BEK.

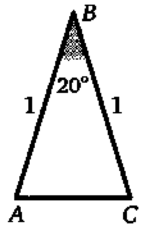
11. Три стороны четырехугольника равны 1. Найдите его четвертую сторону, если два угла, не прилегающих к этой стороне, равны 120°.

12. Стороны треугольника равны a, b и c. Напротив стороны длины a в треугольнике лежит угол 120°. Докажите, что из отрезков a, b и $b + c$ можно сложить треугольник. Чему равен средний угол получившегося треугольника?

13. На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* взяли точки *K* и *M* так, что угол *MAK* равен 45°. Докажите, что $BK + DM = MK$.



К задаче 13

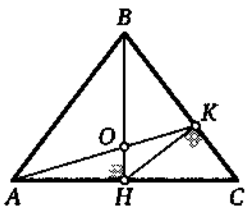


К задаче 14

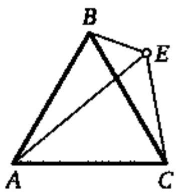
14. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, а угол между ними равен 20°. Докажите, что его основание больше 1/3.

***15.** Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, а угол между ними равен 40°. Докажите, что его основание больше 2/3.

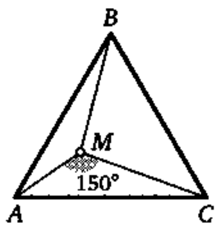
***16.** На основание *AC* равнобедренного треугольника *ABC* опущена высота *BH*. Из точки *H* на его боковую сторону *BC* опустили перпендикуляр *HK*. Отрезки *AK* и *BH* пересекаются в точке *O*. Какой отрезок больше: *BO* или *BK*?



К задаче 16



К задаче 17



К задаче 18

17. Вне равностороннего треугольника *ABC* взята точка *E* так, что угол *BEC* равен 120°. Докажите, что $BE + EC = AE$.

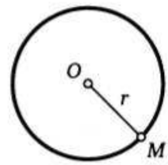
***18.** В равностороннем треугольнике *ABC* взяли точку *M* так, что $\angle AMC = 150°$. Докажите, что из отрезков *AM*, *BM* и *CM* можно сложить прямоугольный треугольник.

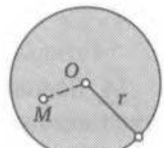
Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, которые удовлетворяют какому-либо определенному условию.

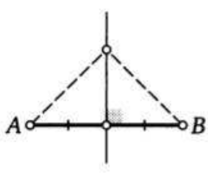
Окружность — это множество всех точек на плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от данной точки. Данная точка называется *центром* окружности, указанное расстояние — ее *радиусом*.

Круг — это множество всех точек плоскости, удаленных от данной точки не более, чем на длину данного отрезка. Указанная точка называется *центром*, а данный отрезок — *радиусом* круга.

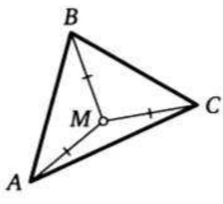




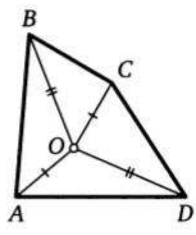
1. (Теорема.) Докажите, что геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, является серединный перпендикуляр к отрезку AB.



К задаче 1



К задаче 3



К задаче 4

2. Даны отрезок AB и прямая. В каком случае на прямой а) существуют две точки, равноудаленные от A и B? б) таких точек нет?

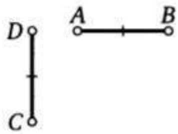
3. Дан треугольник ABC. Где на плоскости находится такая точка M, что $AM = BM = CM$?

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Где находится такая точка O, что $AO = CO$, $BO = DO$? Сколько может быть таких точек?

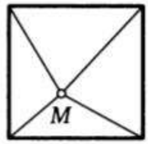
5. Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что на плоскости существуют две такие точки O, что $AO = DO$, $BO = CO$. Докажите, что стороны BC и AD параллельны.

6. Дан треугольник ABC. Некоторая точка M такова, что $AM = 1$, $BM = 2$, $CM = 3$. Докажите, что такая точка единственна.

7. На рисунке даны два равных отрезка AB и CD. Найдите все такие точки M на плоскости, что треугольники ABM и CDM равны. Сколько существует таких точек?



К задаче 7



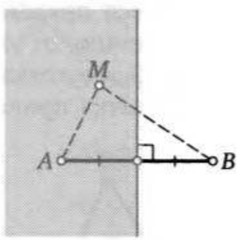
К задаче 9

8. Дана точка O. Нарисуйте на плоскости множество всех таких точек M, что а) $OM = 3$ см; б) $OM < 3$ см; в) 2 см $< OM <$ 3 см.

<u>9.</u> Дан квадрат. Закрасьте внутри него множество всех таких точек M, расстояния от которых до четырех вершин квадрата не больше его стороны.

10. Дан отрезок AB. Закрасьте на плоскости множество всех таких точек M, что $AM < AB < BM$.

11. (Теорема.) Дан отрезок AB. Докажите, что геометрическим местом таких точек M, что $AM < BM$, является полуплоскость, расположенная по ту же сторону от серединного перпендикуляра к отрезку AB, что и точка A.



К задаче 11

<u>12.</u> Дан отрезок AB. Где расположены на плоскости все такие точки M, что AM — наименьшая сторона треугольника AMB? Ответ представьте в виде заштрихованной области.

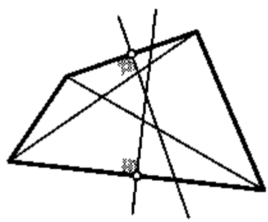
13. В равностороннем треугольнике ABC взята точка O так, что угол ABO больше $30°$. Докажите, что $AO > CO$.

14. Дан равносторонний треугольник ABC. Изобразите множество всех таких точек M внутри него, что BM меньше AM и CM.

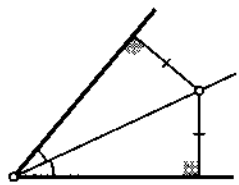
15. Точка O — середина отрезка MK. Известно, что $AM < BM$, $AK < BK$. Докажите, что $AO < BO$.

16. Дан квадрат $ABCD$. Где находятся все такие точки M, что $AM \leqslant BM \leqslant CM \leqslant DM$?

***17.** Диагонали четырехугольника равны. Известно, что серединный перпендикуляр к одной его стороне пересекает противоположную сторону. Докажите, что это верно и для противоположной стороны.



К задаче 17

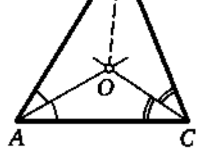


К задаче 18

18. (Теорема.) Дан угол меньше развернутого. Докажите, что геометрическим местом точек внутри угла, равноудаленных от его сторон, является биссектриса данного угла.

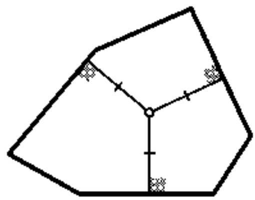
19. Даны две пересекающиеся прямые. Где расположены на плоскости все точки, равноудаленные от этих прямых?

20. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что эта точка принадлежит и биссектрисе угла B.

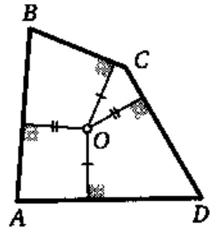


К задаче 20

<u>21.</u> Дан шестиугольник, никакие стороны которого не параллельны. Сколько существует точек, которые равноудалены от трех его данных несмежных сторон?



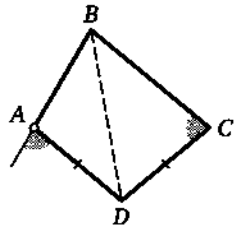
К задаче 21



К задаче 22

22. Дан выпуклый четырехугольник, у которого нет параллельных сторон. Где находится такая точка, которая одновременно равноудалена от двух пар его противоположных сторон? Сколько может быть таких точек?

23. В четырехугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен углу BCD, $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.



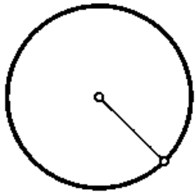
К задаче 23

Знакомство с окружностью

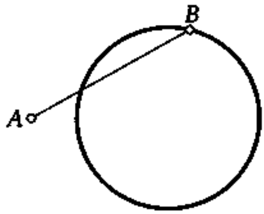
Хордой называется отрезок, соединяющий любые две точки окружности[9].

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через ее центр[10].

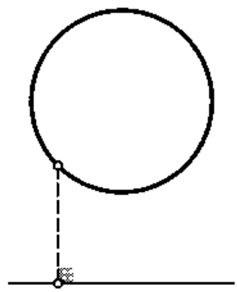
1. Найдите ошибку в следующем определении окружности: «окружность — это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки».



К задаче 1



К задаче 4



К задаче 5

2. Принадлежит ли окружности ее центр? Тот же вопрос для круга.

<u>3.</u> Докажите, что любая хорда окружности не превосходит ее диаметра.

4. Даны окружность и точка A, не лежащая на ней. Где на окружности необходимо взять точку B так, чтобы отрезок AB был а) самым коротким? б) самым длинным?

5. Прямая не пересекает окружность. Где на окружности находится точка, расстояние от которой до этой прямой наименьшее?

---

[9] В переводе с древнего греческого языка слово хорда означает тетива лука.

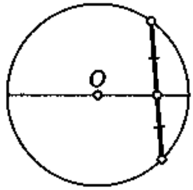
[10] Диаметром произвольной фигуры называют отрезок, соединяющий наиболее удаленные точки фигуры; например, диаметром квадрата служит любая его диагональ.

6. В окружности проведены две параллельные хорды. Докажите, что у них есть общий серединный перпендикуляр.

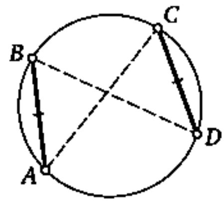
7. Докажите, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии их центров.

8. Докажите, что равные хорды окружности находятся на одинаковых расстояниях от центра.

9. Хорда окружности делится пополам ее диаметром. Докажите, что либо эта хорда перпендикулярна данному диаметру, либо она сама проходит через центр окружности.



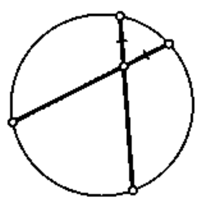
К задаче 9



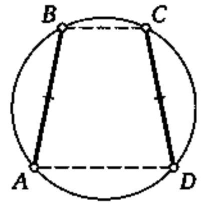
К задаче 10

10. В окружности проведены две равные непересекающиеся хорды AB и CD. Докажите, что хорды AC и BD тоже равны.

11. Две хорды окружности пересекаются так, что отмеченные на рисунке отрезки равны. Докажите, что сами хорды тоже равны.



К задаче 11



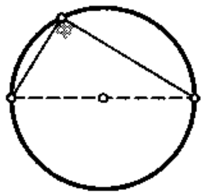
К задаче 12

12. Хорды AB и CD окружности равны (см. рисунок). Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

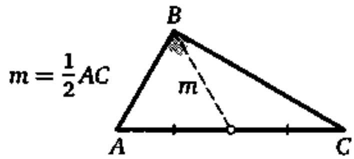
13. В окружность радиуса 1 вписан шестиугольник, все стороны которого равны. Найдите его периметр.

14. Как одним циркулем без линейки получить отрезок в два раза длиннее данного? А в три раза длиннее?

15. (Свойство диаметра окружности.) Докажите, что диаметр окружности из любой ее точки «виден» под прямым углом.



К задаче 15



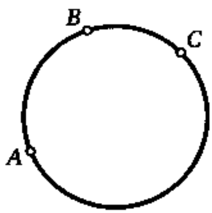
К задаче 16

16. (Теорема.) Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, равна половине гипотенузы.

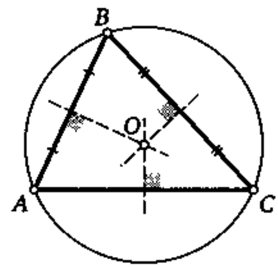
17. Два противоположных угла четырехугольника прямые. Докажите, что все его вершины лежат на одной окружности.

18. Два противоположных угла четырехугольника прямые, а его диагонали перпендикулярны. Докажите, что одна из них делит другую пополам.

19. На окружности отметили три точки. Как по ним найти ее центр?



К задаче 19

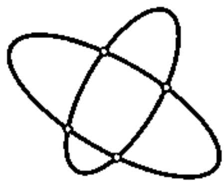


К задаче 20

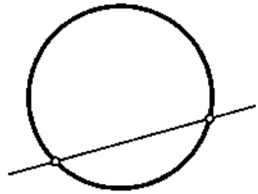
20. (Теорема об описанной окружности треугольника.) Докажите, что вокруг любого треугольника всегда можно описать только одну окружность. Центр этой окружности находится на пересечении серединных перпендикуляров ко всем сторонам данного треугольника.

21. Приведите пример четырехугольника, вокруг которого нельзя описать окружность.

22. Как видно из рисунка, два овала могут пересекаться в четырех точках. А сколько общих точек могут иметь две окружности и почему?



К задаче 22

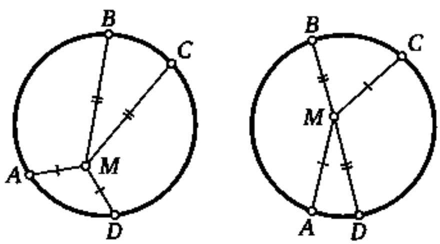


К задаче 23

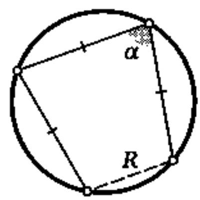
23. Почему окружность и прямая не могут пересекаться более чем в двух точках?

24. Две хорды окружности делят друг друга пополам. Докажите, что точка их пересечения — центр окружности.

25. Точки A, B, C, D в данном порядке лежат на одной окружности. На плоскости взяли такую точку M, что а) $AM = DM$, $BM = CM$; б) $AM = CM$, $BM = DM$. Обязательно ли точка M находится в центре окружности?



К задаче 25



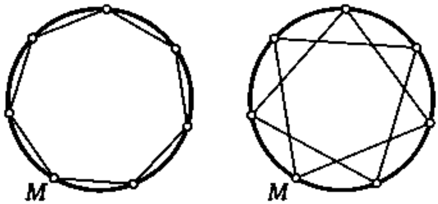
К задаче 27

26. Центр описанной окружности лежит внутри треугольника. Докажите, что этот треугольник остроугольный.

27. В окружность вписана простая ломаная, состоящая из трех равных звеньев. Расстояние между началом и концом ломаной равно радиусу окружности. Найдите угол между соседними звеньями ломаной. *Внимание: у задачи два ответа!*

28. Какой ответ будет в предыдущей задаче, если ломаная имеет самопересечения?

***29.** Сколько существует замкнутых ломаных, вписанных в одну окружность, состоящих из семи равных звеньев и выходящих из точки *M* этой окружности?



К задаче 29

К задаче 30

30. В окружность вписана замкнутая пятизвенная ломаная, четыре звена которой равны, а пятое является диаметром окружности. Найдите угол между ее равными звеньями.

Построения циркулем и линейкой

С помощью *линейки* можно провести прямую через любые две точки плоскости.

С помощью *циркуля* можно провести окружность с центром в данной точке и радиусом, равным любому данному отрезку.

При дальнейших построениях можно пользоваться точками пересечения уже проведенных прямых и окружностей. Каким-либо другим способом использовать линейку и циркуль не разрешается.

Более сложные построения можно описывать в виде алгоритма, ссылаясь на *элементарные* построения.

Элементарные построения

1. Даны отрезок и луч. От начала луча отложите отрезок, равный данному.

2. Дан отрезок. Постройте к нему серединный перпендикуляр.

3. Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Опустите из данной точки перпендикуляр на данную прямую.

4. Точка лежит на прямой. Восстановите перпендикуляр к прямой в данной точке.

5. Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Проведите через эту точку прямую, параллельную данной.

6. Постройте биссектрису данного угла.

7. Постройте треугольник, стороны которого равнялись бы трем данным отрезкам. Когда это возможно?

8. От данного луча в заданную полуплоскость отложите угол, равный данному.

Задачи

9. Постройте угол $60°$.

10. Постойте углы $30°$ и $105°$.

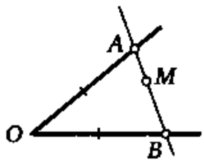
11. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезок длины 0,25.

12. Постройте четырехугольник, стороны которого равны 3 см, 4 см, 5 см и 6 см. Сколько можно построить таких четырехугольников?

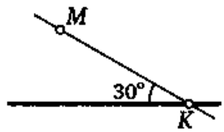
13. Постройте прямоугольный треугольник по длинам его гипотенузы и одного из катетов.

14. Постройте треугольник по длинам двух его сторон и углу, лежащему против одной из них. Сколько решений может иметь задача?

15. Точка M находится внутри угла с вершиной O. Проведите через данную точку прямую, пересекающую стороны угла в таких точках A и B, что $OA = OB$.



К задаче 15



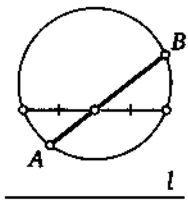
К задаче 16

16. Даны прямая и точка M, не лежащая на ней. Постройте на данной прямой точку K так, чтобы отрезок MK образовывал с ней угол 30°.

17. Дана окружность. Постройте ее центр.

18. Точка M лежит внутри круга. Проведите через нее хорду так, чтобы точка M делила ее пополам.

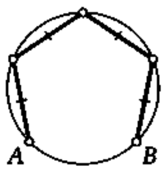
19. Даны окружность, хорда AB этой окружности и прямая l. Постройте хорду этой окружности, параллельную данной прямой, так, чтобы она делилась хордой AB пополам.



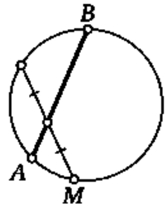
К задаче 19

20. Впишите в окружность равносторонний треугольник, одна вершина которого находилась бы в данной ее точке.

21. На окружности даны точки A и B. Впишите в данную окружность простую ломаную с концами в данных точках, состоящую из четырех равных звеньев.



К задаче 21



К задаче 23

<u>**22.**</u> Даны прямая и точки A и B. Постройте на прямой точку M так, что $\angle AMB = 90°$.

23. Даны окружность, хорда AB и точка M на окружности. Проведите через данную точку еще одну хорду так, чтобы она делилась первой хордой пополам. В каком случае у задачи будет два решения?

24. Постройте прямоугольный треугольник по длинам его гипотенузы и высоты, опущенной на гипотенузу.

<u>**25.**</u> Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме его катетов.

26. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и отрезку, равному сумме двух других его сторон.

27. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и отрезку, равному разности двух других сторон.

28. Постройте треугольник по двум его сторонам и медиане, проведенной к третьей.

29. Постройте треугольник по медиане и двум углам, которые она образует со сторонами, выходящими с ней из одной точки.

30. Постройте треугольник по стороне, противоположному углу и сумме двух других его сторон.

***31.** Постройте треугольник по двум его сторонам и разности противоположных от этих сторон углов.

***32.** Постройте треугольник по двум его углам и периметру.

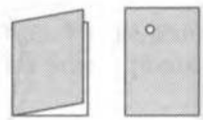
Знакомство с симметрией

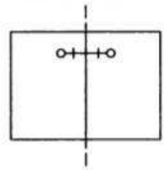
Осевая симметрия

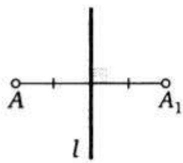
Сложите обычный лист бумаги по прямой линии и проткните его иголкой. Если теперь снова разложить его на плоскость, точки прокола будут находиться по разные стороны от линии сгиба бумаги и на равных от нее расстояниях. Такие точки называют *симметричными относительно прямой*.

Таким образом, при симметрии относительно прямой для каждой точки A на плоскости находят такую точку A_1, что данная прямая будет серединным перпендикуляром к отрезку AA_1. Эту прямую называют *осью симметрии*, а саму симметрию *осевой*. Если точка лежит на оси, считается, что она совпадет с симметричной ей точкой. Симметрия относительно прямой l обозначается так: S_l.

Говорят, что фигура имеет ось симметрии, если при симметрии относительно этой оси фигура переходит сама в себя.



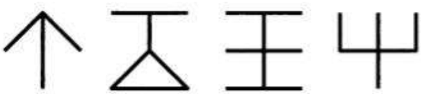




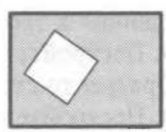
осевая симметрия S_l

1. Нарисуйте фигуру, симметричную слову СИММЕТРИЯ относительно любой горизонтальной прямой.

2. Какая фигура должна быть следующей в приведенном на рисунке ряду?



К задаче 2



К задаче 4

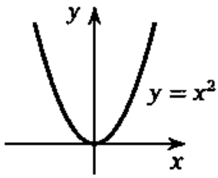
3. Обрывок листа бумаги не имеет ни одного ровного края. Как без циркуля и линейки получить на нем прямой угол? А угол 22,5°?

4. Можно ли так сложить обычный лист бумаги, чтобы одним прямолинейным разрезом сделать в нем квадратную дыру?

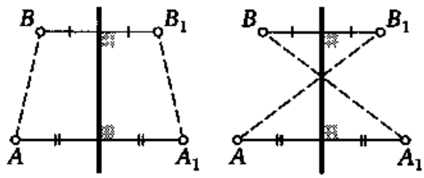
5. Покажите, что окружность симметрична относительно любой прямой, проходящей через ее центр.

6. Докажите, что равнобедренный треугольник имеет ось симметрии.

7. На рисунке показан график функции, заданной уравнением $y=x^2$. Докажите, что он имеет ось симметрии.



К задаче 7



К задаче 9

8. Напишите уравнение какой-нибудь числовой функции, график которой симметричен относительно вертикальной прямой $x=1$.

9. Докажите, что осевая симметрия сохраняет расстояния между точками на плоскости[11].

10. Докажите, что при осевой симметрии отрезок переходит в отрезок, а прямая линия — в прямую.

11. Докажите, что при осевой симметрии угол переходит в равный ему угол.

12. Докажите, что при осевой симметрии окружность переходит в окружность.

13. Сколько осей симметрии имеет угол, отличный от развернутого?

14. Сколько существует симметрий, переводящих данный отрезок в себя?

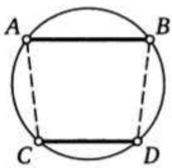
15. Нарисуйте четырехугольник, имеющий: а) только одну ось симметрии; б) ровно две оси симметрии.

16. Две прямые пересекаются под острым углом. Сколько осей симметрии имеет образованная ими фигура?

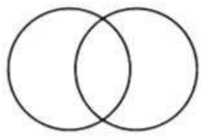
---

[11] Данное свойство как раз и показывает, что симметрия относительно прямой является движением.

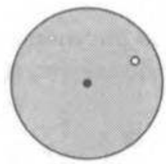
17. В окружности провели две параллельные хорды AB и CD. Докажите, что $AC = BD$.



К задаче 17



К задаче 20



К задаче 21

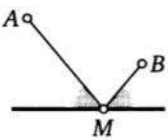
18. Две прямые пересекают окружность, центр которой лежит на биссектрисе угла между ними. Докажите, что эти прямые высекают на окружности равные хорды.

19. Через точку внутри окружности провели две равные хорды. Докажите, что они симметричны относительно одного из ее диаметров.

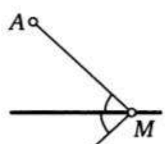
20. Докажите, что фигура, состоящая из двух равных окружностей, обладает двумя осями симметрии.

21. На круглом торте нарисован дракон, глаз которого не находится в центре круга. Разрежьте данный торт на две части и переложите их так, чтобы они снова образовали круглый торт, а глаз дракона оказался бы точно в его центре.

<u>22.</u> Точки A и B лежат по одну сторону от прямой. Постройте на этой прямой такую точку M, чтобы отрезки AM и BM образовывали с данной прямой равные углы.



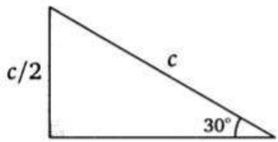
К задаче 22



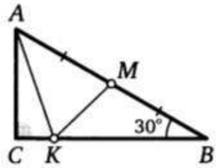
К задаче 23

23. Решите задачу, аналогичную предыдущей, если точки A и B лежат по разные стороны от прямой. Всегда ли это возможно?

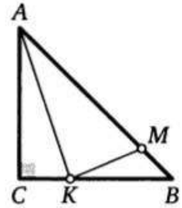
24. (Теорема.) Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что лежащий против него катет в два раза меньше гипотенузы.



К задаче 24



К задаче 25

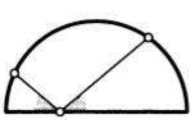


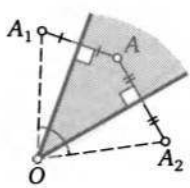
К задаче 26

25. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, угол B которого равен 30°. На его катете BC выбирают такую точку K, что $AK + KM = BC$. Докажите, что $MK \perp AB$.

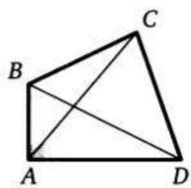
26. На гипотенузе AB и катете BC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC соответственно взяли произвольные точки M и K. Докажите, что $AK + KM \geqslant AB$.

27. Из точки, лежащей на диаметре полукруга, под равными к нему углами провели два отрезка так, как показано на рисунке. Докажите, что сумма этих отрезков не больше диаметра полукруга.


К задаче 27



К задаче 28



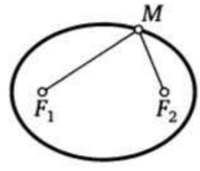
К задаче 29

28. Внутри острого угла с вершиной O взяли произвольную точку A. Ее отразили относительно сторон угла и получили точки A_1 и A_2. Докажите, что угол A_1OA_2 не зависит от выбора точки.

29. В четырехугольнике $ABCD$ угол BAD прямой. Докажите, что $BC + CD + BD > 2 \cdot AC$.

30. *Эллипсом* называют множество всех точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (называемых его фокусами) постоянна. Внешне эллипс похож на овал или вытянутую окружность. Докажите, что эллипс имеет две оси симметрии, причем эти оси перпендикулярны друг другу.

$F_1M + F_2M = \mathrm{const}$



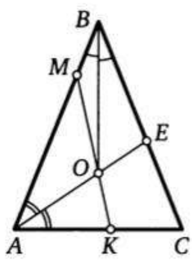
К задаче 30

31. Постройте треугольник, если даны одна его вершина и три прямые, на которых лежат его биссектрисы.

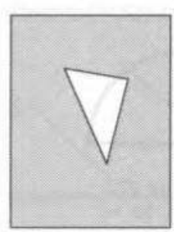
32. Постройте треугольник по длинам двух его сторон и разности лежащих против них углов.

33. Постройте треугольник по двум его углам и разности противолежащих им сторон.

34. Биссектриса AE равнобедренного треугольника ABC пересекает биссектрису его угла B в точке O. На боковой стороне AB взяли точку M так, что $AM = AC$. Прямая MO пересекает основание AC в точке K. Докажите, что $AK = EC$.



К задаче 34

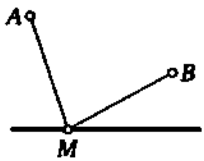


К задаче 35

***35.** На листе бумаги нарисован треугольник. Сложите этот лист так, чтобы одним прямым разрезом получить в нем дыру в виде данного треугольника.

Кратчайшие пути

1. (Задача Герона из Александрии.) Точки A и B лежат по одну сторону от прямой. Постройте на этой прямой такую точку M, чтобы сумма отрезков $AM + BM$ была минимальна.

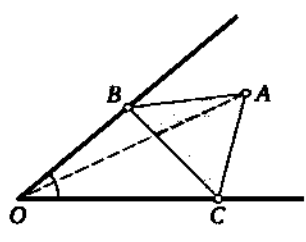


К задаче 1

2. Точки A и B находятся по разные стороны от прямой. Найдите на этой прямой такую точку M, чтобы модуль разности $|AM - BM|$ принимал наибольшее значение.

3. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данной высотой, проведенной к этому основанию, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

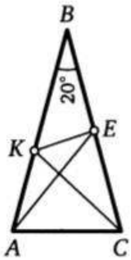
4. Внутри острого угла с вершиной O взяли точку A. Постройте на двух его сторонах точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.



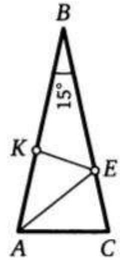
К задаче 4

5. Найдите минимальный периметр треугольника ABC из предыдущей задачи, если $OA = 1$, а величина данного угла равна $30°$.

6. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 1, а угол ABC равен 20°. На стороне AB выбирают произвольную точку K, а на стороне BC — произвольную точку E. Найдите минимум суммы $AE + EK + KC$.



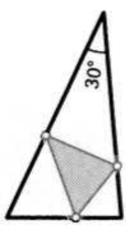
К задаче 6



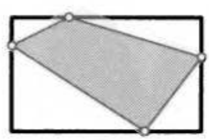
К задаче 7

7. Боковые стороны AB и BC равнобедренного треугольника ABC равны 1, а угол между ними равен 15°. На стороне AB выбирают произвольную точку K, а на стороне BC — произвольную точку E. Найдите минимум $AE + EK$.

***8.** Один из углов остроугольного треугольника равен 30°. На каждой его стороне выбрали по одной точке. Докажите, что минимальный периметр образованного этими точками треугольника равен одной из высот исходного треугольника.



К задаче 8

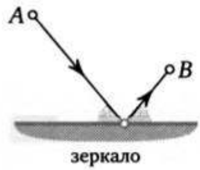


К задаче 9

***9.** На каждой стороне прямоугольника взяли по одной точке. Докажите, что наименьший периметр образованного этими точками четырехугольника равен сумме диагоналей прямоугольника.

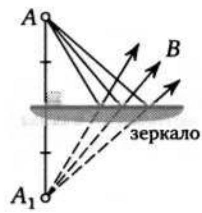
Отражения и зеркала

С задачей Герона связан также закон отражения луча света от прямого зеркала: угол его падения на зеркало равен углу отражения. Это правило было известно еще Евклиду. Но только в XVII веке Пьер Ферма сформулировал основной принцип, который справедлив во всех современных теориях: луч света (при его отражении, преломлении и т. д.) между двумя точками идет по пути, на который он тратит наименьшее время.



1. При падении и отражении от зеркала луч света образует с ним равные углы. Докажите, что в этом случае он идет через зеркало по самому короткому пути между точками A и B.

Представим себе, что из точки A выходит множество лучей света. Все они после отражения от зеркала будут лежать на прямых, проходящих через симметричную точке A точку A_1. Для наблюдателя, находящегося в других точках B, будет казаться, что он «видит» точку A_1. Говорят, что в этой точке находится мнимое изображение точки A. Поэтому зеркала как будто «удваивают» пространство, и осевую симметрию называют еще зеркальной.



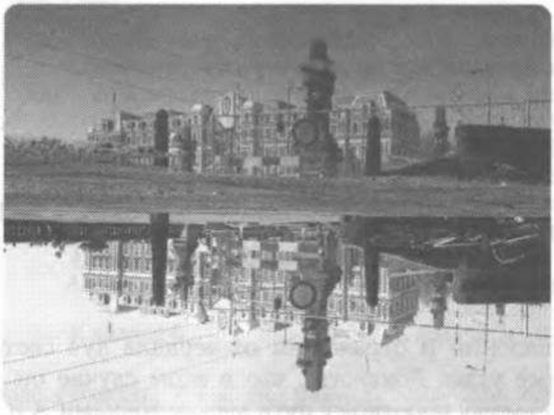
2. Как нужно расположить зеркало, чтобы нормально прочитать в нем слово: а) КОФЕ; б) ПОТОП?

3. Как вы думаете, почему на некоторых машинах спереди пишут RNЦAMNHAЭЧ?

4. Догадайтесь с помощью зеркала, что здесь написано:

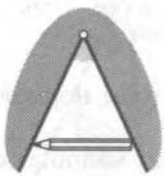
5. **(Философский вопрос.)** Если подойти к зеркалу и поднять правую руку, то ваше отражение «поднимет» левую, то есть зеркало меняет местами право и лево. Но как вы думаете, почему оно не меняет верх и низ?

6. Спокойная поверхность воды отражает окружающие предметы не хуже зеркала. Догадайтесь, где на приведенной фотографии находится оригинал, а где его отражение.

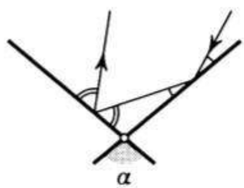


К задаче 6

7. Возьмите две створки зеркального шкафа (или трюмо), поверните их под углом друг к другу и приставьте к ним карандаш так, как показано на рисунке. Под каким углом нужно повернуть зеркала, чтобы из отражений сложился: а) треугольник; б) четырехугольник; в) шестиугольник?



К задаче 7

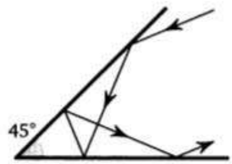


К задаче 8

8. Как вы, наверное, помните, два перпендикулярных друг другу зеркала образуют катафот. Он разворачивает упавший на него луч света на 180°. Повернем теперь зеркала под тупым углом α. На какой угол по отношению к направлению падающего луча повернется отраженный двумя зеркалами луч?

9. Луч света отражается от прямого зеркала. Сам луч не меняли, а зеркало повернули на угол α. На какой угол повернется отраженный луч?

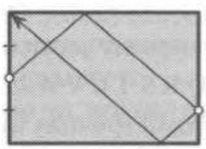
10. Луч света последовательно отражается относительно сторон зеркального угла в 45°. Докажите, что после последнего отражения он «вернется» параллельно направлению его падения на первое зеркало. Можно ли доказать это так, чтобы не считать много углов?



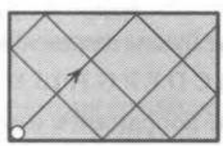
К задаче 10

***11.** Какое максимальное число раз может отразиться луч света от сторон зеркального угла, равного 10°?

12. По шару, который стоит у середины борта бильярда, ударили так, что после трех отражений[12] от других бортов он попал в соседнюю лузу. В каком отношении делит противоположную сторону бильярда точка его отражения K?



К задаче 12

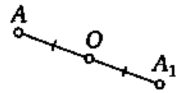


К задаче 13

***13.** В одной из угловых луз прямоугольного бильярда стоит шар. По нему бьют под углом 45° к борту. Докажите, что если отношение сторон бильярда — рациональное число, то после нескольких ударов о борта шар обязательно попадет в другую лузу. Сколько раз ударится шар о борта, если отношение сторон равно $4:9$?

[12] В математических задачах про бильярд предполагается, что шар отражается от бортов так же, как луч света в зеркале. На практике бильярдные шары движутся сложнее, поскольку после удара кием могут получить кручение вокруг собственной оси.

Центральная симметрия



центральная симметрия Z_O

Точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки* O, если O является серединой отрезка AA_1. Если мы каждой точке A на плоскости поставим в соответствие симметричную ей точку A_1, то это значит, что на плоскости мы задали *центральную симметрию.* Точка O называется *центром симметрии*, при симметрии она переходит сама в себя. Центральная симметрия обозначается так: Z_O.

Фигура называется *центрально-симметричной*, если при симметрии относительно некоторой точки она переходит сама в себя.

1. С помощью циркуля и линейки постройте точку, симметричную данной точке A относительно точки O. Можно ли это сделать только одним циркулем?

2. Докажите, что окружность имеет центр симметрии.

3. Имеют ли центр симметрии отрезок, луч, прямая?

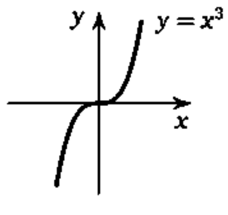
4. Напишите три двузначных числа, десятичная запись которых имеет центр симметрии. Существуют ли такие трехзначные числа?

5. Какие буквы латинского алфавита имеют центр симметрии?

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

6. Какие координаты имеет точка, симметричная точке $A(x; y)$ относительно начала координат?

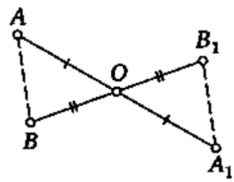
7. На рисунке показан график функции, заданной уравнением $y = x^3$. Докажите, что он имеет центр симметрии.



К задаче 7

8. Двое игроков по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол. Касаться уже лежащих монет или сдвигать их нельзя. Проигрывает тот, кто не может положить монету (так, чтобы она не упала со стола). Кто из игроков выиграет при правильной игре и как ему следует играть?

9. Докажите, что центральная симметрия не меняет расстояний: если точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно точки O, то расстояния A_1B_1 и AB равны.



К задаче 9

10. Докажите, что при центральной симметрии отрезок переходит в отрезок.

11. Докажите, что при центральной симметрии прямая переходит либо в параллельную ей прямую, либо сама в себя.

<u>12.</u> Точка не лежит на прямой. Постройте прямую, симметричную данной прямой относительно данной точки.

13. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

14. Верно ли, что центральная симметрия сохраняет величины углов?

15. Два равных отрезка лежат на параллельных прямых. Докажите, что существует центральная симметрия, переводящая один из них в другой.

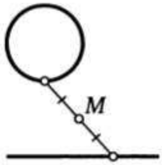
16. Противоположные стороны шестиугольника попарно параллельны и равны. Докажите, что этот шестиугольник имеет центр симметрии.

17. Нарисуйте: а) четырехугольник; б) восьмиугольник, имеющие центр симметрии.

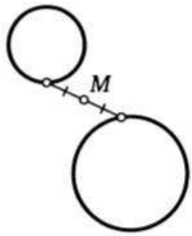
18. Может ли иметь центр симметрии пятиугольник?

19. Докажите, что любой эллипс имеет центр симметрии. Где находится ее центр?

<u>20.</u> Через данную точку M проведите прямую так, чтобы ее отрезок с концами на данной прямой и данной окружности делился точкой M пополам.



К задаче 20

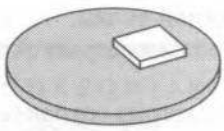


К задаче 21

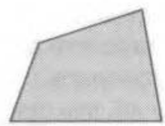
21. Через данную точку M проведите прямую так, чтобы ее отрезок на двух данных окружностях делился точкой M пополам.

22. Внутри треугольника взяли произвольную точку. Всегда ли можно провести через нее три прямые так, чтобы отрезок каждой из них внутри треугольника делился данной точкой пополам?

23. На круглый ломоть хлеба произвольно положили квадратный ломтик сыра. Как разрезать полученный бутерброд на две части, чтобы в них было поровну и хлеба, и сыра?



К задаче 23



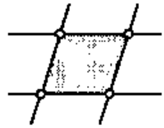
К задаче 25

<u>24.</u> Некоторая фигура имеет две перпендикулярные друг другу оси симметрии. Докажите, что она имеет центр симметрии.

***25.** Фирма «Оригинальный кафель» выпускает плитки для пола в форме четырехугольников без равных и параллельных сторон. Докажите, что при определенном умении такими плитками можно замостить всю плоскость.

Параллелограммы

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны[13].



Свойства параллелограмма

1. Противоположные углы параллелограмма равны.

2. Противоположные стороны параллелограмма равны.

3. Диагонали параллелограмма пересекаются и делят друг друга пополам точкой пересечения.

Признаки параллелограмма

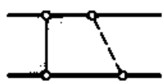
1. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то он — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то он — параллелограмм.

3. Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делят друг друга пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

4. Если у четырехугольника две стороны параллельны и равны одновременно, то он — параллелограмм.

Расстоянием между параллельными прямыми называется длина отрезка общего перпендикуляра к этим прямым. Расстояние между параллельными прямыми не зависит от того, в какой точке проводится данный перпендикуляр и является наименьшим возможным отрезком, соединяющим точки этих прямых.



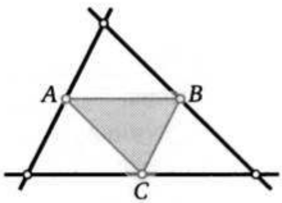
Высотой параллелограмма называется отрезок, перпендикулярный двум его противоположным сторонам (или их продолжениям).

1. Докажите первый признак параллелограмма.

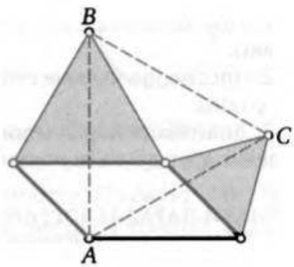
[13] В переводе с древнего греческого языка слово параллелограмм означает «вычерченный параллельными». Поэтому для его обозначения уместен знак #.

2. Две стороны четырехугольника параллельны, а одна его диагональ делит другую пополам. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

3. Через каждую вершину треугольника ABC параллельно его противоположной стороне провели прямую. Эти прямые образовали новый треугольник. Докажите, что вершины старого треугольника являются серединами сторон нового.



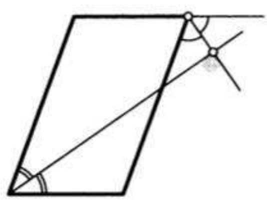
К задаче 3



К задаче 4

4. На двух сторонах параллелограмма построили равносторонние треугольники так, как показано на рисунке. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

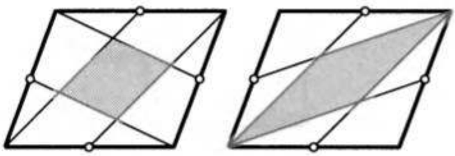
5. Докажите, что биссектриса угла, смежного с углом параллелограмма, перпендикулярна биссектрисе его противоположного угла.



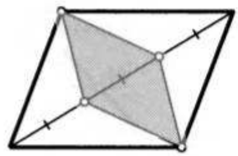
К задаче 5

6. Биссектрисы двух углов при одной стороне параллелограмма делят другую его сторону на три равные части. Найдите отношение сторон параллелограмма.

7. Вершины параллелограмма соединили с серединами его сторон так, как показано на рисунках. Докажите, что заштрихованные фигуры тоже параллелограммы.



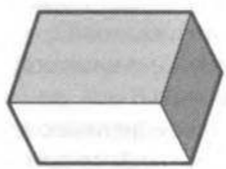
К задаче 7



К задаче 8

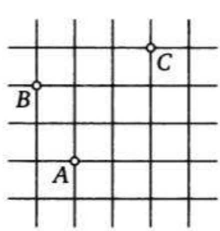
8. Диагональ параллелограмма разбили на три равные части. Докажите, что полученные точки деления и две другие его вершины образуют новый параллелограмм.

9. Из трех параллелограммов составили шестиугольник так, как это показано на рисунке. Докажите, что этот шестиугольник можно разбить на три параллелограмма другим способом.



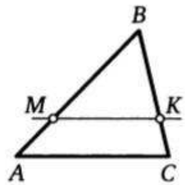
К задаче 9

10. На клетчатой бумаге отметили точки A, B, C так, как это показано на рисунке. Где необходимо взять четвертую точку D, чтобы получился параллелограмм $ABCD$?

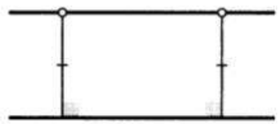


К задаче 10

11. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает две другие стороны в точках M и K. Докажите, что $MK < AC$.



К задаче 11



К задаче 12

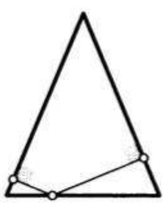
12. (Теорема о расстоянии между параллельными прямыми.) Докажите, что расстояние от всех точек одной прямой до параллельной ей прямой постоянно.

13. Три точки лежат по одну сторону от данной прямой и находятся на одинаковых расстояниях от нее. Докажите, что данные три точки лежат на одной прямой.

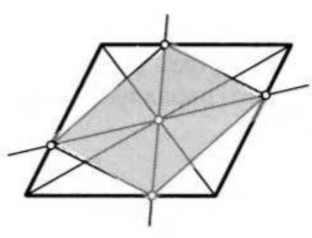
14. а) Где находятся все точки плоскости, расстояние от которых до некоторой прямой одинаково?

б) Где находятся все точки плоскости, равноудаленные от двух данных параллельных прямых?

15. На основании равнобедренного треугольника взята произвольная точка. Докажите, что сумма расстояний от нее до боковых сторон треугольника постоянна.



К задаче 15

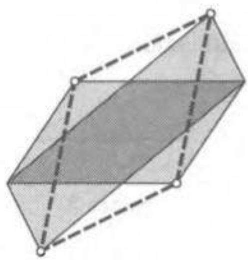


К задаче 16

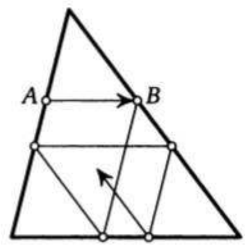
16. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма провели две произвольные прямые. Докажите, что точки их пересечения с его сторонами образуют новый параллелограмм.

17. Две пары противоположных сторон шестиугольника соответственно параллельны и равны. Докажите, что третья пара его противоположных сторон обладает тем же свойством.

18. У двух параллелограммов совпадает пара противоположных вершин. Докажите, что остальные четыре их вершины образуют новый параллелограмм.



К задаче 18

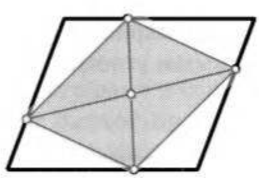


К задаче 19

19. Из произвольной точки A, взятой на стороне треугольника, проводится прямая, параллельная другой его стороне и пересекающая третью в точке B. Далее процесс повторяется. В результате получается ломаная. Верно ли, что она замкнется?

20. Биссектрисы противоположных углов некоторого четырехугольника попарно параллельны. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

<u>21.</u> Вершины одного параллелограмма по одной лежат на сторонах другого. Докажите, что их центры совпадают. Центр параллелограмма — это точка пересечения его диагоналей.

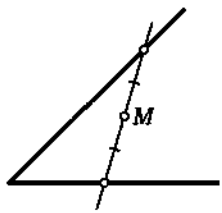


К задаче 21

22. Все углы шестиугольника равны. Докажите, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.

Дополнительные построения, связанные с параллелограммом

1. Даны угол и точка M внутри него. Как провести через нее прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключенный внутри угла, делился точкой M пополам?



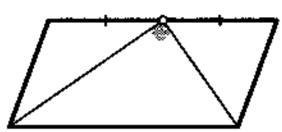
К задаче 1

2. Сколько прямых, указанных в предыдущей задаче, можно провести через данную точку?

3. Внутри угла взяли точку. Как провести через нее прямую так, чтобы она проходила через вершину, если самой вершиной нельзя пользоваться?

4. Даны угол и некоторая прямая l. Постройте прямую, параллельную l, так, чтобы угол высекал на ней отрезок определенной длины.

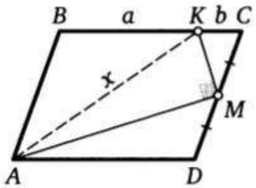
5. Из середины стороны параллелограмма противоположная его сторона видна под прямым углом. Найдите отношение сторон параллелограмма.



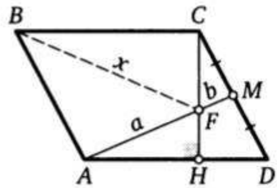
К задаче 5

6. Разрежьте данный параллелограмм на две части, из которых можно составить треугольник.

7. Точка M — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$. Точка K делит его сторону BC на отрезки с длинами a и b так, что угол $AMK = 90°$. Найдите AK.



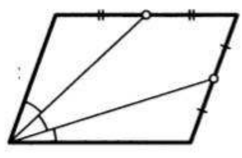
К задаче 7



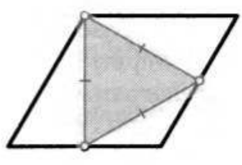
К задаче 8

8. Вершину тупого угла A параллелограмма $ABCD$ соединили с точкой M — серединой его стороны CD. Высота CH параллелограмма пересекает отрезок AM в точке F. Найдите BF, если $AF = a$, $FM = b$.

9. Вершину параллелограмма соединили с серединами двух его противоположных сторон. Могут ли равняться три отмеченных на рисунке угла?



К задаче 9



К задаче 10

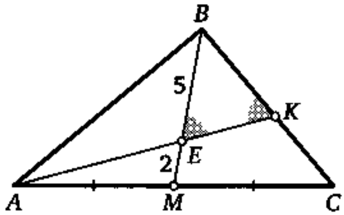
10. Вершина параллелограмма и середины двух его противоположных сторон образуют равносторонний треугольник. Найдите углы параллелограмма на рисунке.

11. Разбейте данный треугольник на две части так, чтобы из них можно было составить треугольник, не равный данному.

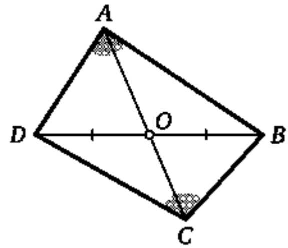
12. Медиана треугольника образует с его сторонами, выходящими из той же вершины, углы 40° и 70°. Докажите, что эта медиана равна половине одной из них.

13. Постройте треугольник по сумме двух его сторон, углу между ними и медиане, проведенной к третьей стороне.

14. На медиане BM треугольника ABC взяли точку E. Прямая AE пересекает сторону BC в точке K и образует равные углы с прямыми BM и BC. Найдите BC, если $BE = 5$, $EM = 2$.



К задаче 14



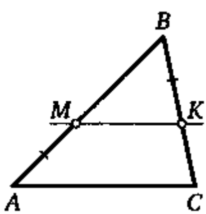
К задаче 15

<u>15.</u> У четырехугольника два противоположных угла равны, а соединяющая их диагональ делит другую пополам. Обязательно ли данный четырехугольник является параллелограммом?

16. Диагональ четырехугольника разбивает его на два треугольника с равными периметрами. Другая диагональ пересекает ее в середине. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

17. Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника равного периметра. Докажите, что данный четырехугольник — параллелограмм.

***18.** Параллельно стороне AC треугольника ABC проведите прямую, которая пересекла бы его стороны AB и BC в таких точках M и K, что $AM = BK$.



К задаче 18

Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны[14]. Параллельные стороны называются *основаниями* трапеции, а непараллельные — *боковыми сторонами*.

Трапеция называется *равнобокой*, если у нее равны боковые стороны.

Трапеция называется *прямоугольной*, если у нее есть прямой угол.

прямоугольная трапеция

Свойства равнобокой трапеции

1. Углы при основании равнобокой трапеции равны.
2. Диагонали равнобокой трапеции равны.

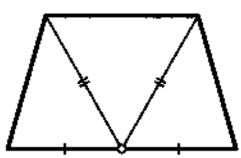
Признаки равнобокой трапеции

1. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобокая.
2. Если диагонали трапеции равны, то она равнобокая.

равнобокая трапеция

1. Назовите в русском языке существительное, однокоренное слову трапеция.

2. Середина основания трапеции равноудалена от концов другого основания. Обязательно ли данная трапеция равнобокая?



К задаче 2

[14] Поскольку трапеция в технике перспективы служила изображением стола, продолжения ее боковых сторон должны были пересекаться на «линии горизонта», то есть не могли быть параллельны.

3. Докажите свойства равнобокой трапеции.

4. Докажите первый признак равнобокой трапеции.

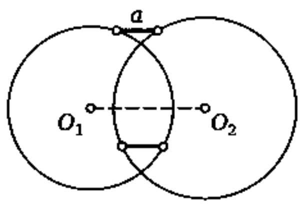
5. Докажите второй признак равнобокой трапеции.

6. Существует ли трапеция, длины оснований которой равны 2 и 6, а длины боковых сторон 1 и 5?

7. Постройте трапецию по длинам всех ее сторон.

8. Постройте трапецию по длинам ее оснований и диагоналей.

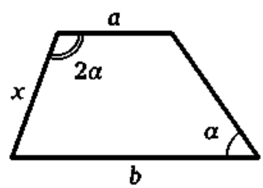
9. Даны две пересекающиеся окружности разных радиусов. Постройте отрезок данной длины a с концами на этих окружностях, параллельный линии их центров. Сколько решений может иметь задача?



К задаче 9

10. Углы при одном основании трапеции равны 50° и 80°. Докажите, что одна из ее боковых сторон равна разности оснований.

11. Один из углов трапеции в два раза больше противоположного. Найдите боковую сторону при данном угле, если основания трапеции равны a и b.



К задаче 11

12. Существуют ли две такие трапеции, что боковые стороны каждой из них равны основаниям другой?

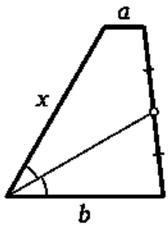
13. Каждая диагональ трапеции равна сумме ее оснований. Найдите угол между ее диагоналями.

14. Постройте трапецию по длинам ее оснований и диагоналей.

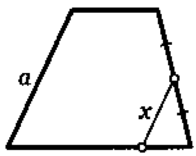
15. Разрежьте трапецию на две части, из которых можно сложить треугольник.

16. Разрежьте трапецию на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

17. Биссектриса одного угла трапеции делит ее боковую сторону пополам. Найдите другую боковую сторону трапеции, если основания равны a и b.



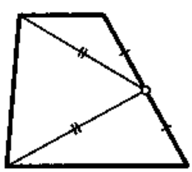
К задаче 17



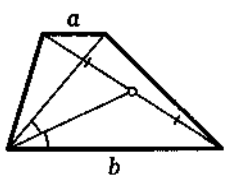
К задаче 18

18. Боковая сторона трапеции равна a. Параллельно ей через середину другой боковой стороны провели прямую. Какой отрезок этой прямой заключен внутри трапеции?

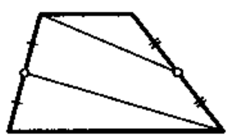
19. Середина боковой стороны трапеции равноудалена от двух противоположных от нее вершин. Докажите, что трапеция прямоугольная.



К задаче 19



К задаче 20



К задаче 21

20. Биссектриса угла между основанием и первой диагональю трапеции делит вторую ее диагональ пополам. Найдите первую диагональ трапеции, если ее основания равны a и b.

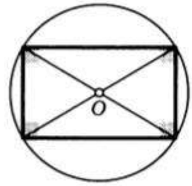
21. Середины боковых сторон трапеции соединили с противоположными вершинами так, как показано на рисунке. Могут ли полученные два отрезка лежать на параллельных прямых?

22. Произвольную точку M внутри равностороннего треугольника ABC соединили с вершинами. Докажите, что на каждой стороне треугольника можно выбрать по одной точке так, чтобы расстояния между ними были равны AM, BM и CM.

***23.** Любую точку M внутри равнобокой трапеции $ABCD$ соединили со всеми вершинами. Докажите, что из отрезков AM, BM, CM и DM можно составить четырехугольник, вписанный в данную трапецию.

Прямоугольник, ромб, квадрат

Прямоугольником называется параллелограмм, все углы которого прямые.

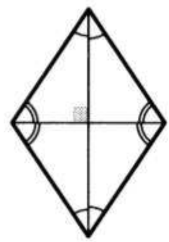


Свойства прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны.
2. Прямоугольник можно вписать в окружность.

Признаки прямоугольника

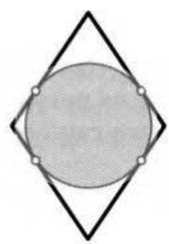
1. Если у параллелограмма равны диагонали, то он — прямоугольник.
2. Если параллелограмм можно вписать в окружность, то он — прямоугольник.



Ромбом называется параллелограмм, у которого равны все стороны.

Свойства ромба

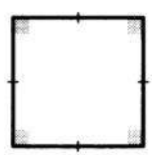
1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.
2. В ромб можно вписать окружность[15].



Признаки ромба

1. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то он — ромб.
2. Если в параллелограмм можно вписать окружность, то он — ромб.

Квадратом называется параллелограмм, у которого равны все стороны и все углы. Квадрат является правильным четырехугольником[16]. Из определения очевидно, что квадрат одновременно является и прямоугольником, и ромбом.

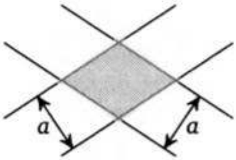


[15] Это свойство и аналогичный признак будут доказаны позже в теме «Касательные».

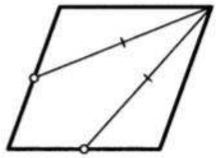
[16] Многоугольник называют правильным, если у него равны все стороны и все углы.

1. Докажите первый признак прямоугольника.

2. Докажите, что при пересечении двух «полос» одинаковой ширины всегда образуется ромб. Под шириной полосы понимается расстояние между параллельными прямыми.



К задаче 2



К задаче 6

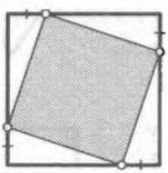
3. Середины сторон параллелограмма образуют ромб. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

4. Середины сторон параллелограмма образуют прямоугольник. Докажите, что данный параллелограмм — ромб.

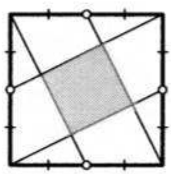
5. Докажите второй признак прямоугольника.

6. Вершина параллелограмма равноудалена от середин двух его сторон. Докажите, что этот параллелограмм — ромб.

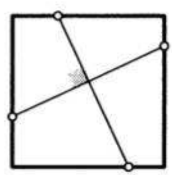
7. На каждой стороне квадрата взяли по точке так, что отмеченные на рисунке отрезки равны. Докажите, что четыре отмеченные точки сами образуют квадрат.



К задаче 7



К задаче 8



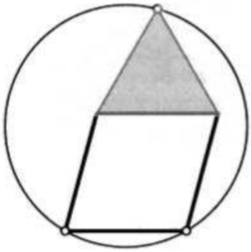
К задаче 9

8. Вершины квадрата соединили отрезками с серединами сторон так, как показано на рисунке. Докажите, что закрашенная на рисунке фигура — квадрат.

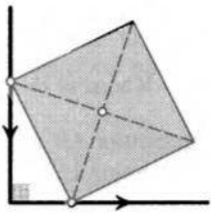
9. В квадрате провели два перпендикулярных отрезка так, как показано на рисунке. Докажите, что они равны.

10. На сторонах параллелограмма вне его построили квадраты. Докажите, что их центры тоже образуют квадрат.

<u>11.</u> На стороне ромба построили равносторонний треугольник. Докажите, что радиус отмеченной на рисунке окружности равен стороне ромба.



К задаче 11

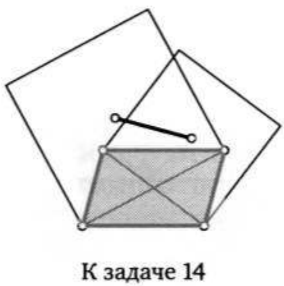


К задаче 12

12. Две соседние вершины квадрата «скользят» по сторонам прямого угла. Докажите, что его центр все время находится на биссектрисе этого угла.

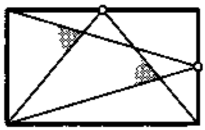
13. В данный параллелограмм впишите ромб так, чтобы на каждой стороне параллелограмма находилось по одной вершине ромба, причем одна из них была в заданной точке. Всегда ли это возможно?

14. На каждой диагонали параллелограмма построили по квадрату. Докажите, что расстояние между центрами квадратов равно одной из сторон параллелограмма.

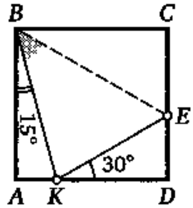


К задаче 14

15. Отмеченные на рисунке точки — середины сторон прямоугольника. Докажите, что отмеченные на нем углы равны.



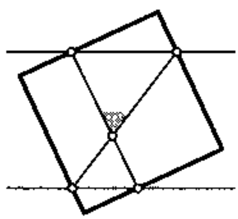
К задаче 15



К задаче 16

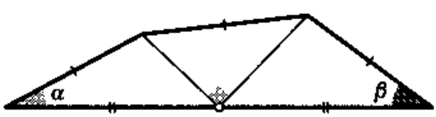
16. На сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ взяли точки K и E так, что угол ABK равен 15°, а угол EKD равен 30°. Найдите угол KBE.

17. Две прямые, расстояние между которыми равно стороне квадрата, пересекают его стороны в четырех точках так, как это показано на рисунке. Найдите угол между двумя отмеченными отрезками, соединяющими эти точки.



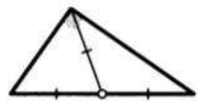
К задаче 17

***18.** Три стороны четырехугольника равны, причем одна из них (показанная на рисунке) видна под прямым углом из середины четвертой. Найдите сумму углов $\alpha + \beta$ при четвертой стороне.



К задаче 18

Медиана прямоугольного треугольника



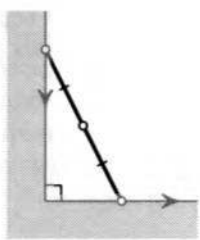
Свойство прямоугольного треугольника. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине его гипотенузы.

Признак прямоугольного треугольника. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

1. Докажите свойство прямоугольного треугольника.

2. Докажите признак прямоугольного треугольника.

3. Прислоненная к вертикальной стене лестница начала падать, скользя по полу. Какую траекторию описывает ее середина?



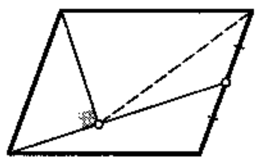
К задаче 3

4. В четырехугольнике два противоположных угла прямые, а диагонали перпендикулярны друг другу. Докажите, что одна из них делит другую пополам.

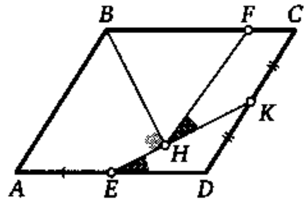
5. В четырехугольнике два противоположных угла прямые, а соединяющая их диагональ делится пополам другой диагональю. Докажите, что эти диагонали либо равны, либо перпендикулярны.

6. Диагонали четырехугольника перпендикулярны, а отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон, равен среднему арифметическому этих сторон. Докажите, что данный четырехугольник — трапеция или ромб.

7. Вершину параллелограмма соединили с серединой его стороны. На полученный отрезок из другой вершины опустили перпендикуляр. Докажите, что пунктирный отрезок на рисунке равен стороне параллелограмма.



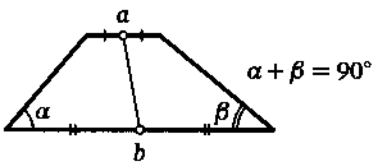
К задаче 7



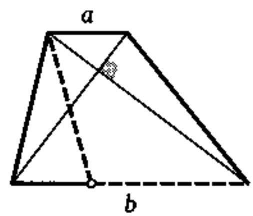
К задаче 8

8. Точки E и K — середины сторон AD и DC параллелограмма $ABCD$. Из его вершины B на прямую EK опустили перпендикуляр BH. На стороне BC выбрали точку F так, что углы FHK и KED равны. Найдите $BF : FC$.

9. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если сумма углов при одном из них равна 90°, а длины оснований равны a и b.



К задаче 9



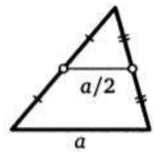
К задаче 11

10. Основания трапеции равны a и b. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований, если диагонали трапеции перпендикулярны.

11. Точка на одном основании трапеции находится на одинаковом расстоянии от концов ее диагонали. Найдите это расстояние, если диагонали трапеции перпендикулярны, а ее основания равны a и b.

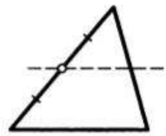
Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Всего у треугольника три средние линии.



Теорема о средней линиии. Средняя линия треугольника параллельна его основанию и равна половине этого основания.

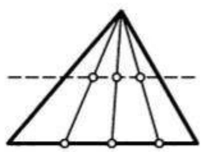
Признак средней линии. Если прямая параллельна стороне треугольника и делит одну его сторону пополам, то на этой прямой лежит средняя линия треугольника.



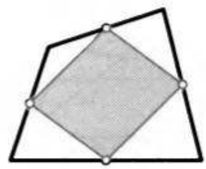
1. Где может находиться прямая, равноудаленная от всех вершин треугольника? Сколько всего таких прямых?

2. Прямая проходит через середину стороны треугольника и параллельна другой его стороне. Докажите, что она пересекает третью сторону треугольника в середине.

3. Вершину треугольника соединяют с произвольной точкой на противоположной его стороне. Докажите, что середины всех полученных отрезков лежат на одной прямой.



К задаче 3



К задаче 5

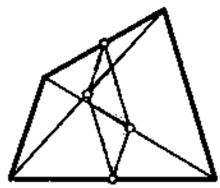
4. Отрезок с концами на двух сторонах треугольника параллелен третьей стороне и равен ее половине. Докажите, что этот отрезок — средняя линия треугольника.

5. (Теорема Вариньона.) В произвольном четырехугольнике отметили середины всех сторон. Докажите, что полученные точки образуют параллелограмм.

6. Диагонали четырехугольника равны. Докажите, что его средние линии[17] перпендикулярны.

7. Известно, что средние линии четырехугольника равны. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.

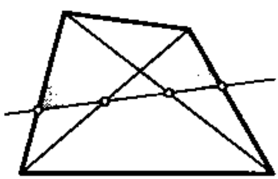
8. Докажите, что середины противоположных сторон четырехугольника и середины двух его диагоналей образуют параллелограмм (либо лежат на одной прямой).



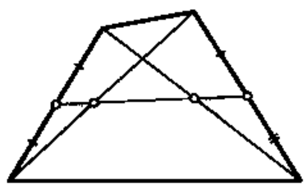
К задаче 8

9. Докажите, что средние линии четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.

10. Противоположные стороны четырехугольника равны. Докажите, что прямая, проходящая через середины его диагоналей, образует с этими сторонами равные углы.



К задаче 10



К задаче 11

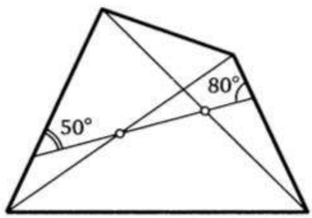
11. Средняя линия четырехугольника[17] образует с его диагоналями равные углы. Докажите, что диагонали этого четырехугольника равны.

12. Диагонали четырехугольника равны, а одна из его средних линий в два раза их меньше. Найдите угол между диагоналями.

[17] Средней линией четырехугольника называют отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон.

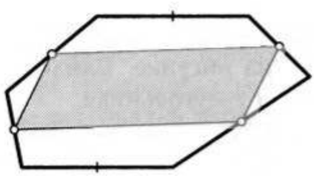
13. Две противоположные стороны четырехугольника равны 1. Найдите отрезок, соединяющий середины двух других его сторон, если сумма углов при одной из них равна 60°.

14. Прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника, образует с его сторонами углы 50° и 80°. Докажите, что расстояние между серединами диагоналей равно половине одной из сторон четырехугольника.

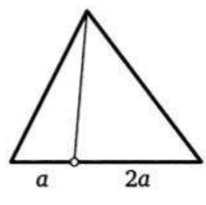


К задаче 14

15. Две противоположные стороны шестиугольника параллельны и равны. Докажите, что середины четырех остальных его сторон образуют параллелограмм.



К задаче 15

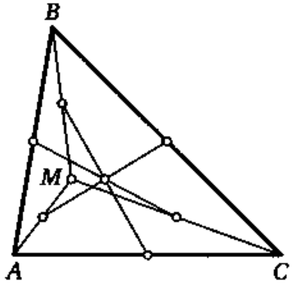


К задаче 16

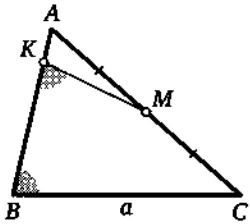
16. Вершину треугольника соединили с точкой, делящей его противоположную сторону в отношении $2:1$. Докажите, что получившийся отрезок разбивает данный треугольник на два треугольника, у которых есть по равной медиане.

17. Середины соседних сторон параллелограмма соединили отрезком. Докажите, что одна из диагоналей параллелограмма делит его пополам. В каком отношении эта диагональ сама делится точкой пересечения с этим отрезком?

18. Внутри треугольника ABC взяли произвольную точку M. Середины отрезков AM, BM и CM соединили с серединами сторон BC, AC и AB треугольника соответственно. Докажите, что три полученных отрезка пересекаются в одной точке.



К задаче 18

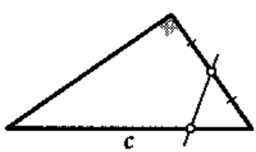


К задаче 20

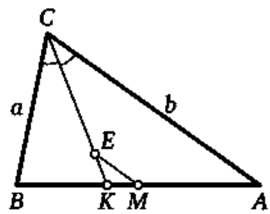
19. Докажите, что середины всех сторон треугольника и основание любой его высоты образуют равнобокую трапецию.

20. Сторона BC треугольника равна a. Середину стороны AC соединили с точкой на стороне AB так, что отмеченные на рисунке углы равны. Найдите MK.

21. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Через середину его катета провели прямую, которая делит гипотенузу в отношении $1:3$ так, как показано на рисунке. Найдите отрезок данной прямой, заключенный внутри треугольника.



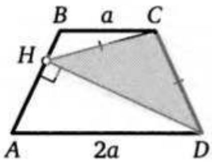
К задаче 21



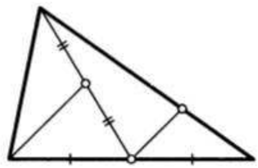
К задаче 22

22. Дан треугольник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $a < b$. Через середину стороны AB проводят прямую, параллельную AC, которая пересекая биссектрису CK в точке E. Найдите ME.

23. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Из вершины D на сторону AB опустили перпендикуляр DH. Докажите, что треугольник CHD равнобедренный.



К задаче 23



К задаче 26

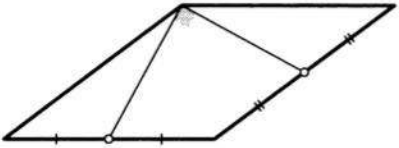
24. Разрежьте произвольный треугольник на три части, из которых можно сложить прямоугольник.

25. Разрежьте квадрат на три части так, чтобы из них можно было сложить треугольник без равных сторон и прямых углов.

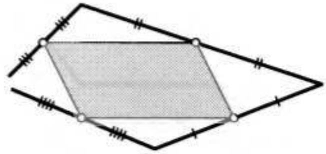
26. Вершину треугольника соединили отрезком с серединой его медианы. Второй отрезок проходит через основание медианы и параллелен первому. Найдите отношение этих параллельных отрезков.

27. На двух сторонах треугольника вне его построили квадраты. Докажите, что их центры равноудалены от середины третьей его стороны

28. Два отрезка, соединяющие вершину параллелограмма с серединами не содержащих ее сторон, перпендикулярны. Найдите отношение диагоналей параллелограмма.



К задаче 28

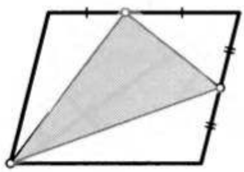


К задаче 30

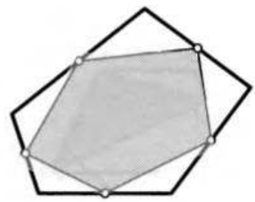
29. Постройте: а) треугольник; б) параллелограмм, если заданы середины всех его сторон.

30. Середины всех четырех звеньев ломаной являются вершинами параллелограмма. Докажите, что данная ломаная замкнута.

31. Постройте параллелограмм по одной вершине и серединам двух не содержащих ее сторон.



К задаче 31

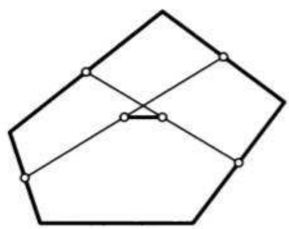


К задаче 32

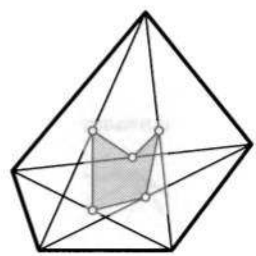
32. На доске нарисовали пятиугольник. Потом его стерли, но оставили середины всех сторон. Как по этим пяти точкам восстановить пятиугольник?

33. Тот же вопрос, что и в предыдущей задаче, но для семиугольника.

34. Середины четырех сторон пятиугольника соединили так, как показано на рисунке. Докажите, что расстояние между серединами двух полученных отрезков равно четверти одной из сторон пятиугольника.



К задаче 34

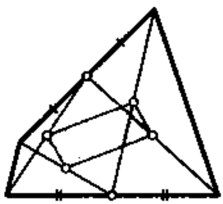


К задаче 35

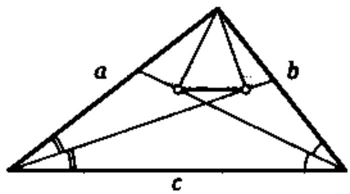
35. Восстановите пятиугольник по серединам всех его диагоналей.

36. На всех сторонах треугольника взяли по точке (отличной от вершин). Каждую из них соединили с противоположной вершиной. Могут ли середины трех получившихся отрезков лежать на одной прямой?

37. Середины двух противоположных сторон четырехугольника соединили с его вершинами так, как показано на рисунке. Докажите, что середины полученных отрезков образуют параллелограмм.



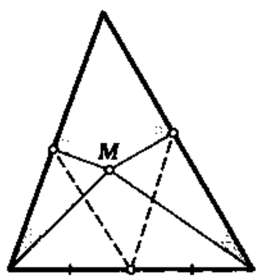
К задаче 37



К задаче 38

38. На биссектрисы двух углов треугольника из третьей его вершины опустили перпендикуляры. Найдите отрезок между основаниями этих перпендикуляров, если стороны треугольника равны a, b и c.

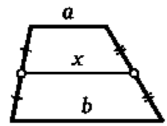
***39.** В треугольнике взяли точку M так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на боковые стороны треугольника, равноудалены от середины основания треугольника.



К задаче 39

Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.



$$x = \frac{a+b}{2}$$

Теорема о средней линиии трапеции. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их среднему арифметическому.

Признак средней линии трапеции. Если прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через середину одной ее боковой стороны, то средняя линия трапеции лежит на этой прямой.

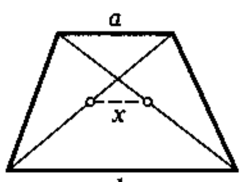
1. Возьмите середину диагонали трапеции. Докажите, что она лежит на ее средней линии.

2. Докажите теорему о средней линии трапеции.

3. Докажите признак средней линии трапеции.

4. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен ее основаниям и равен их среднему арифметическому. Верно ли, что данный отрезок — средняя линия трапеции?

5. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, если ее основания равны a и b.

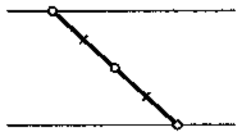


К задаче 5

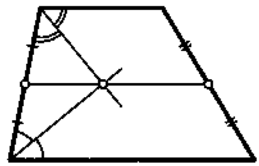
6. Средняя линия трапеции делится ее диагоналями на три равные части. Найдите отношение оснований трапеции.

7. Основание треугольника равно 1. Найдите отрезок, соединяющий середины его медиан, проведенных к боковым сторонам.

8. Концы произвольных отрезков лежат на двух параллельных прямых. Где могут находиться их середины?



К задаче 8

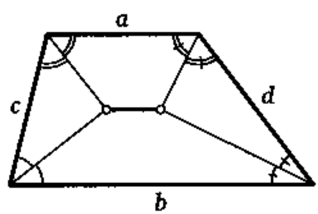


К задаче 10

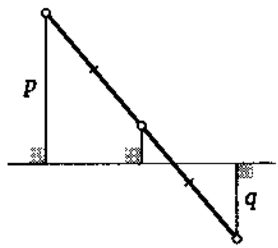
9. Средняя линия четырехугольника равна полусумме двух его сторон, не имеющих с ней общих точек. Докажите, что данный четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

10. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.

11. В трапеции провели биссектрисы всех углов. Найдите расстояние между отмеченными на рисунке точками их пересечения, если основания трапеции равны a и b, а боковые стороны — c и d.



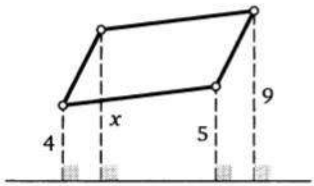
К задаче 11



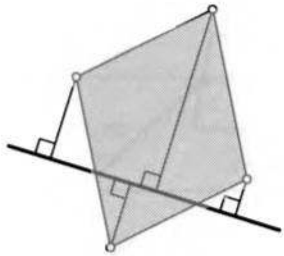
К задаче 12

12. Расстояния от двух точек до некоторой прямой равны p и q. Найдите расстояние от середины соединяющего их отрезка до этой прямой, если точки находятся: а) по одну сторону от прямой; б) по разные стороны от прямой.

13. Прямая не пересекает сторон параллелограмма. Расстояния от трех его вершин до этой прямой равны последовательно 4, 5 и 9. Найдите расстояние до прямой от четвертой его вершины.



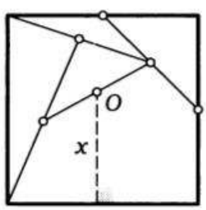
К задаче 13



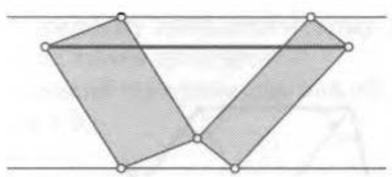
К задаче 14

14. Прямая пересекает две соседние стороны параллелограмма. На нее из всех его вершин опущены перпендикуляры. Докажите, что один из них равен сумме трех других.

15. Сторона квадрата равна 1. Каждая из отмеченных на рисунке точек является серединой своего отрезка. Найдите отмеченное на рисунке пунктиром расстояние от точки O до стороны квадрата.



К задаче 15



К задаче 16

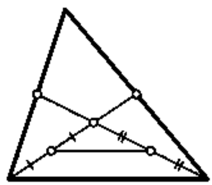
16. Два параллелограмма имеют общую вершину, а также по одной вершине на двух параллельных прямых, как показано на рисунке. Докажите, что отрезок, соединяющий оставшиеся две вершины, параллелен данным прямым.

Медианы треугольника

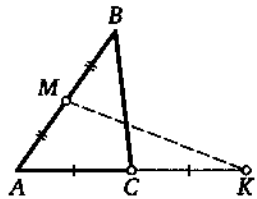
1. Две медианы в треугольнике равны. Докажите, что он равнобедренный.

*2. Можно ли утверждение предыдущей задачи доказать без пятого постулата Евклида?

3. **(Свойство медиан треугольника.)** Докажите, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2 : 1, считая от вершины. *Для доказательства используйте приведенный чертеж.*



К задаче 3

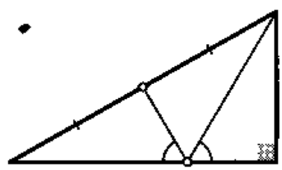


К задаче 5

4. Две медианы треугольника перпендикулярны. Найдите отношение третьей его медианы к соответствующей стороне.

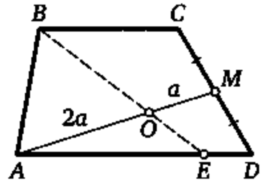
5. На продолжении стороны AC треугольника ABC взяли точку K так, что $CK = AC$. Точка M — середина AB. В каком отношении прямая MK делит сторону BC?

6. Точку на катете прямоугольного треугольника соединили с одной его вершиной и серединой гипотенузы. При этом оказалось, что отмеченные на рисунке углы равны. В каком отношении данная точка делит катет?



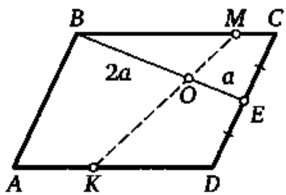
К задаче 6

7. В трапеции $ABCD$ точка M — середина боковой стороны CD. На отрезке AM взяли точку O так, что $AO:OM=2:1$. Прямая BO пересекает основание AD в точке E. Докажите, что отрезок AE равен средней линии трапеции.



К задаче 7

*8. Точка E — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$, точка K лежит на стороне AD. На отрезке BE взята точка O так, что $BO=2\cdot OE$. Прямая OK пересекает сторону BC в точке M. Найдите отношение $CM:AK$.



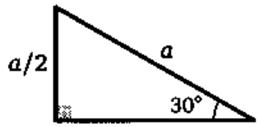
К задаче 8

9. Докажите, что из медиан произвольного треугольника всегда можно составить новый треугольник так, что его стороны будут параллельны данным медианам.

10. Из медиан данного треугольника составили новый треугольник. В нем провели произвольную медиану. Докажите, что она составляет $3/4$ одной стороны прежнего треугольника.

Прямоугольный треугольник с углом 30°

1. (Свойство прямоугольного треугольника с углом 30°.) Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, в два раза меньше его гипотенузы.



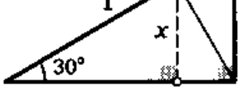
К задаче 1

2. (Признак прямоугольного треугольника с углом 30°.) В прямоугольном треугольнике один катет в два раза короче гипотенузы. Докажите, что против него лежит угол 30°.

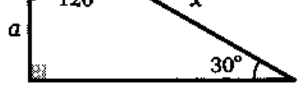
3. Одна сторона треугольника в два раза длиннее другой, а угол между ними равен 60°. Найдите меньший из углов треугольника.

4. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. На его гипотенузу опустили высоту. В каком отношении она ее делит?

5. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°, а его гипотенуза равна 1. Найдите длину отмеченного пунктиром на рисунке отрезка.



К задаче 5

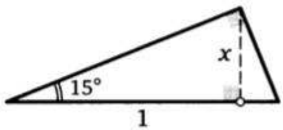


К задаче 7

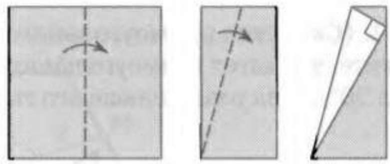
6. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. К его гипотенузе провели серединный перпендикуляр. В каком отношении он делит больший катет треугольника?

7. Выразите сторону четырехугольника, обозначенную буквой x на рисунке, через его стороны a и b.

8. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1, а один из его углов равен 15°. Найдите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу.



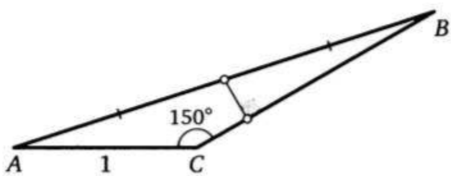
К задаче 8



К задаче 9

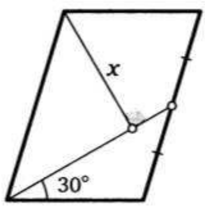
9. Квадратный лист бумаги сложили вдвое, а затем перегнули так, показано на рисунке. Чему равен отмеченный угол?

10. Угол C треугольника ABC равен 150°. Из середины стороны AB на сторону BC опустили перпендикуляр. Найдите длину этого перпендикуляра, если $AC = 1$.



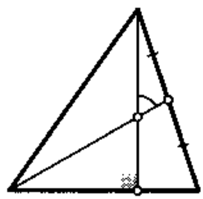
К задаче 10

11. Вершину параллелограмма соединили с серединой его противоположной стороны. Полученный отрезок образует с другой его стороной угол 30°. Докажите, что отмеченный на рисунке перпендикуляр равен одной из сторон параллелограмма.



К задаче 11

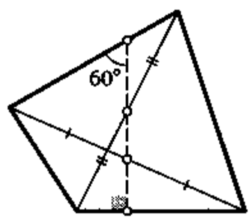
12. В треугольнике медиана равна высоте, проведенной к другой его стороне. Найдите угол между ними.



К задаче 12

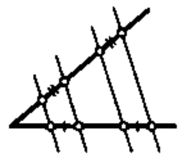
13. Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из той же вершины, образует с этими сторонами углы 30° и 90°.

14. Прямая, проходящая через середины диагоналей четырехугольника, перпендикулярна одной его стороне, а с противоположной стороной образует угол 60°. Докажите, что расстояние между серединами диагоналей равно четверти одной из сторон четырехугольника.



К задаче 14

Теорема Фалеса

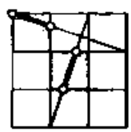


Теорема Фалеса. Если несколько параллельных прямых высекают равные отрезки на одной стороне угла, то они высекают соответственно равные отрезки и на другой его стороне[18].

Лемма о пропорциональных отрезках. Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отношение отрезков, которые они высекают на одной его стороне, равно отношению соответствующих отрезков на другой стороне.

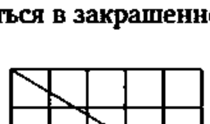
1. Как циркулем и линейкой разделить данный отрезок на три равные части? А на пять равных частей?

2. В квадрате 3×3 клетки провели два отрезка так, как это показано на рисунке. Докажите, что части этих отрезков, находящиеся внутри закрашенных клеток, равны.



К задаче 2

3. В прямоугольнике 3×5 клеток провели диагональ и закрасили одну клетку так, как это показано на рисунке. Какая часть диагонали будет находиться в закрашенной клетке?

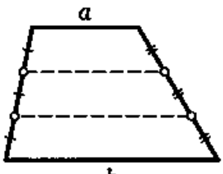


К задаче 3

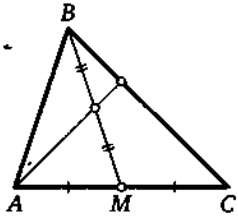
---

[18] Обратная теорема в общем виде неверна.

4. Каждую боковую сторону трапеции разбили на три равные части, соответствующие точки деления соединили. Докажите, что полученные отрезки параллельны основаниям трапеции, и найдите их длины, если основания равны a и b.



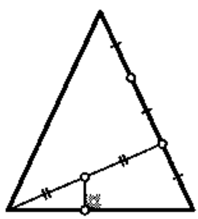
К задаче 4



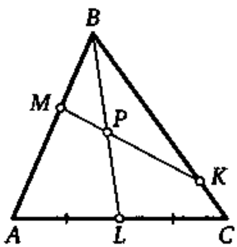
К задаче 5

5. Через вершину A и середину медианы BM треугольника ABC провели прямую. В каком отношении она делит сторону BC?

6. Вершину равнобедренного треугольника соединили с точкой, делящей его боковую сторону в отношении $2:1$. Из середины полученного отрезка на основание треугольника опустили перпендикуляр. В каком отношении он делит основание?



К задаче 6

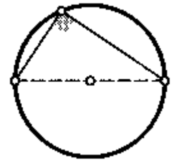


К задаче 7

7. Точки M и K делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении $2:3$ и $4:1$, считая от их общей вершины. В каком отношении делится отрезок MK медианой треугольника, проведенной к стороне AC?

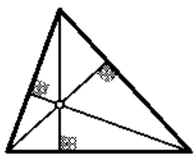
Окружность 2

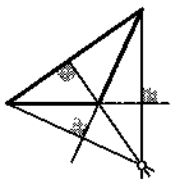
Теорема. Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, является окружность, диаметр которой — данный отрезок[19].



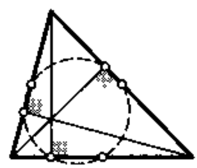
Теорема. Любой треугольник можно вписать в окружность. Серединные перпендикуляры ко всем его сторонам пересекаются в центре этой окружности.

Теорема о высотах треугольника. Высоты любого треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.





Окружность Эйлера. Основания высот и середины сторон неравнобедренного треугольника лежат на одной окружности.



1. Дана окружность радиуса 2. Нарисуйте на плоскости все точки, расстояние от которых до какой-либо точки окружности не превосходит 1.

2. Дан отрезок длины 1. Нарисуйте все точки плоскости, расстояние от которых до какой-либо точки данного отрезка не превосходит 1.

3. Постройте окружность, проходящую через две данные точки, центр которой лежит на данной прямой.

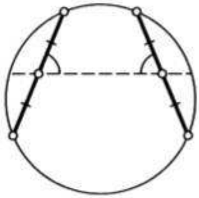
4. Через точку внутри окружности проведите хорду так, чтобы она делилась данной точкой пополам.

[19] Концы самого отрезка не входят в указанное множество, поскольку для них не определен указанный угол.

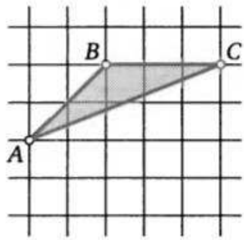
5. Серединные перпендикуляры к трем сторонам четырехугольника пересекаются в одной точке. Докажите, что этот четырехугольник можно вписать в окружность.

6. В окружности провели две перпендикулярные хорды. Докажите, что расстояние между серединами этих хорд равно расстоянию от центра окружности до точки их пересечения.

7. Две хорды окружности равны. Докажите, что прямая, проходящая через их середины, образует с этими хордами равные углы.



К задаче 7

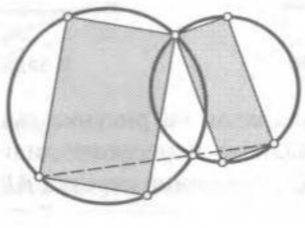


К задаче 8

8. Сторона клетки на рисунке равна 1. На каком расстоянии от прямой *BC* находится центр окружности, проходящей через точки *A*, *B* и *C*?

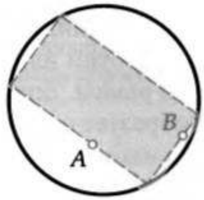
9. На двух сторонах треугольника как на диаметрах построили окружности. Докажите, что они пересекаются на его третьей стороне (или ее продолжении).

10. Два прямоугольника имеют общую вершину. Вокруг каждого из них описали окружность. Докажите, что вторая точка пересечения этих окружностей лежит на одной прямой с двумя вершинами прямоугольников.



К задаче 10

11. Внутри окружности даны точки A и B. Впишите циркулем и линейкой прямоугольник в эту окружность так, чтобы указанные точки лежали на двух его соседних сторонах.



К задаче 11

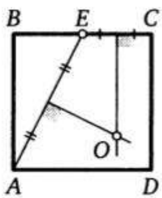
12. Через точку внутри окружности проводятся произвольные хорды. Найдите геометрическое место их середин.

13. В окружность вписан параллелограмм. Докажите, что он является прямоугольником.

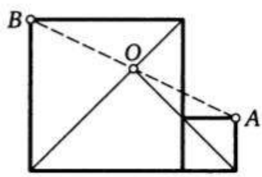
14. Центр описанной окружности треугольника лежит на его средней линии. Найдите больший из углов треугольника.

15. Сторона равностороннего треугольника равна 1. Найдите радиус окружности, проходящей через его вершину, середину противоположной стороны и середину еще одной стороны.

16. Точка E — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AE и EC пересекаются в точке O. Докажите, что она лежит на диагонали квадрата. Найдите $BO : OD$.



К задаче 16



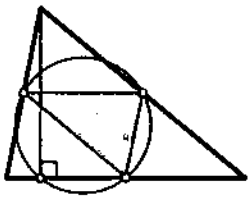
К задаче 17

17. Два угла у квадратов на рисунке смежные. Продолжение диагонали одного квадрата пересекает диагональ другого в точке O. Докажите, что O — середина отрезка AB.

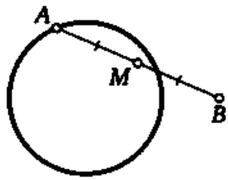
18. В окружность вписана трапеция. Докажите, что она равнобокая.

19. Докажите, что равнобокую трапецию всегда можно вписать в окружность.

20. **(Окружность Эйлера.)** Через середины сторон неравнобедренного треугольника проходит окружность. Докажите, что она вторично пересекает его стороны в основаниях высот.



К задаче 20

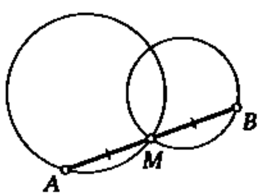


К задаче 22

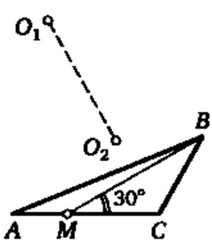
21. Окружность проходит через середину гипотенузы и середину катета прямоугольного треугольника и пересекает другой его катет в двух точках. Первая из этих точек, расположенная ближе к вершине прямого угла, делит катет в отношении $1:4$. В каком отношении делит этот катет вторая точка?

22. Точка A движется по окружности, точка B неподвижна. По какой траектории движется точка M — середина отрезка AB?

23. Две окружности пересекаются в точке M. Как циркулем и линейкой провести через точку M прямую так, чтобы она вторично пересекла эти окружности в точках A и B, причем $AM = BM$?



К задаче 23

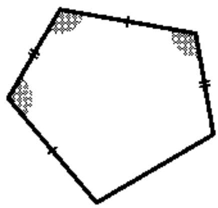


К задаче 24

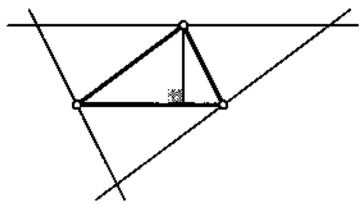
24. На основании AC треугольника ABC взяли точку M так, что угол CMB равен $30°$. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABM и CBM. Докажите, что $O_1O_2 = AC$.

25. Любые четыре вершины пятиугольника лежат на некоторой окружности. Докажите, что все пять его вершин лежат на одной окружности.

26. У пятиугольника есть три равных угла и две пары равных сторон, расположенных так, как показано на рисунке. Докажите, что этот пятиугольник можно вписать в окружность.



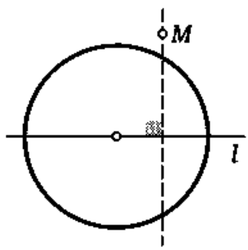
К задаче 26



К задаче 27

27. Пользуясь приведенным чертежом, докажите теорему о высотах треугольника.

28. Даны окружность и прямая, проходящая через ее центр. С помощью только одной линейки опустите из данной точки M перпендикуляр на данную прямую.

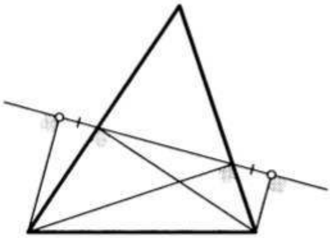


К задаче 28

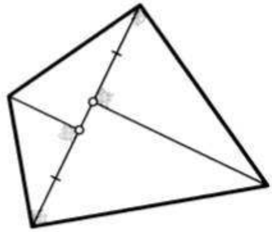
29. В треугольнике ABC провели высоты AM и CK, которые пересеклись в точке H. Точки O и E — середины отрезков AC и BH. Докажите, что прямые OE и MK перпендикулярны.

30. В треугольнике ABC взяли такую точку M, что у треугольников ABM, CBM и ACM равны радиусы описанных окружностей. Докажите, что M — точка пересечения высот треугольника.

31. К двум сторонам треугольника провели высоты. Через их основания провели прямую. На эту прямую из вершин третьей стороны опустили перпендикуляры. Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки равны.



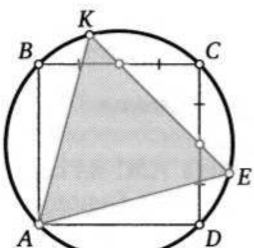
К задаче 31



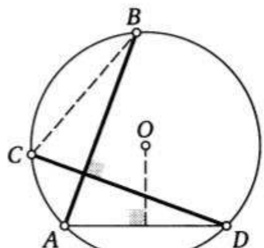
К задаче 32

32. Два противоположных угла четырехугольника прямые. На соединяющую эти углы диагональ из двух других его вершин опустили перпендикуляры. Основания этих перпендикуляров делят данную диагональ на три отрезка. Докажите, что два из этих отрезков равны.

33. В окружность вписан квадрат $ABCD$. Через середины его сторон BC и CD провели хорду KE. Докажите, что треугольник AKE равносторонний.



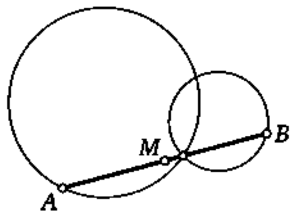
К задаче 33



К задаче 34

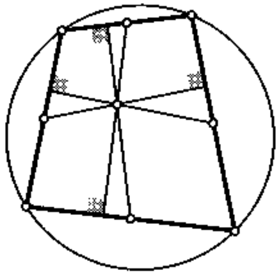
34. В окружности провели две перпендикулярные хорды AB и CD. Докажите, что расстояние от центра окружности до хорды AD в два раза меньше хорды CB.

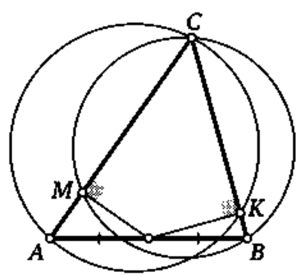
***35.** Через точку пересечения двух окружностей проводят произвольную прямую, которая вторично пересекает эти окружности в точках A и B. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.



К задаче 35

***36.** Из середины каждой стороны вписанного четырехугольника на его противоположную сторону опущен перпендикуляр. Докажите, что четыре таких перпендикуляра пересекаются в одной точке.





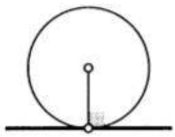
К задаче 36

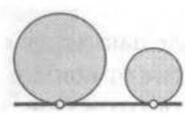
К задаче 37

***37.** На стороны AC и BC треугольника ABC из середины его третьей стороны AB опустили перпендикуляры. Основаниями этих перпендикуляров являются точки M и K соответственно. Вокруг треугольников ACK и BCM описали окружности. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если $AB = 1$.

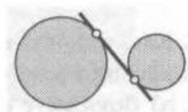
Касательные к окружности

Касательной к окружности называется прямая, имеющая с ней единственную общую точку. Если прямая касается сразу двух окружностей, то она называется их *общей касательной*. Различают внешнюю и внутреннюю касательные к двум окружностям. Если окружности лежат в одной полуплоскости от их общей касательной, то она называется *внешней*, если в разных полуплоскостях, то *внутренней*.





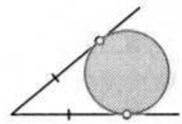
общая внешняя касательная



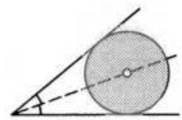
общая внутренняя касательная

Теорема о касательной. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Обратная теорема о касательной. Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной.

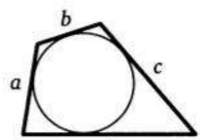


Свойство отрезков касательных. Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.



Свойство окружности, вписанной в угол. Центр окружности, вписанной в угол, находится на биссектрисе угла.

Свойство описанного четырехугольника. В четырехугольнике, описанном вокруг окружности, суммы длин противоположных сторон равны.

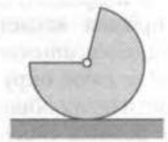


$a+c=b+d$

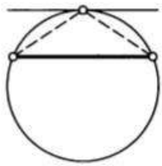
1. Докажите теорему о касательной.

2. Докажите обратную теорему о касательной.

3. Кресло-качалка, основание которого имеет форму дуги окружности, качается на горизонтальном полу. По какой траектории движется центр окружности?



К задаче 3



К задаче 4

4. Касательная параллельна хорде окружности. Докажите, что точка касания равноудалена от концов данной хорды.

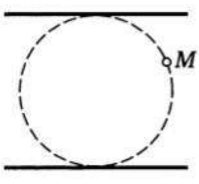
5. а) Докажите свойство отрезков, касательных к окружности; б) Докажите свойство окружности, вписанной в угол.

6. Докажите свойство описанного четырехугольника. Что можно сказать о биссектрисах всех его углов?

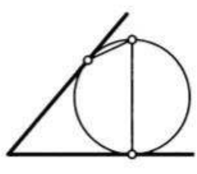
7. Постройте окружность данного радиуса, вписанную в данный угол.

8. Постройте окружность, вписанную в данный угол и касающуюся одной его стороны в данной точке.

9. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Постройте окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась данных прямых. Сколько таких окружностей можно провести?



К задаче 9



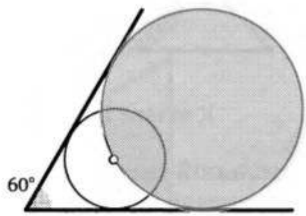
К задаче 10

10. В угол вписана окружность. Через точку ее касания с одной из сторон угла провели диаметр. Другой конец диаметра соединили со второй точкой касания окружности. Докажите, что полученный отрезок параллелен биссектрисе угла.

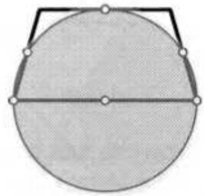
11. Окружность касается всех сторон трапеции. Под каким углом из ее центра видны ее боковые стороны?

12. Окружность вписана в угол, причем расстояние между точками ее касания со сторонами угла равно радиусу. Найдите величину угла.

<u>13.</u> Две окружности вписаны в угол 60°, причем одна проходит через центр другой. Найдите отношение их радиусов.



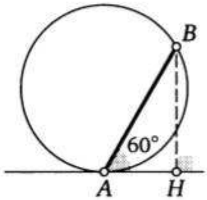
К задаче 13



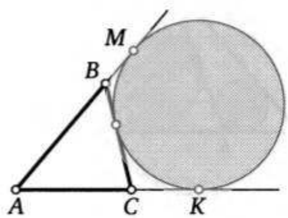
К задаче 14

14. На большем основании трапеции как на диаметре построили окружность. Оказалось, что она проходит через середины ее боковых сторон и касается другого основания. Найдите углы трапеции.

15. Прямая касается окружности радиуса 1 в точке A. Хорда AB образует с касательной угол 60°. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки B на касательную.



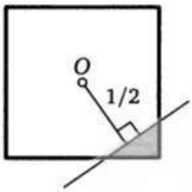
К задаче 15



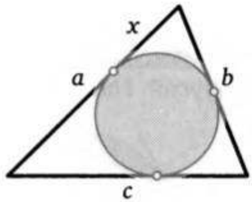
К задаче 16

<u>16.</u> Окружность касается стороны BC треугольника ABC и продолжений двух других его сторон в точках M и K. Докажите, что отрезки AM и AK равны половине периметра треугольника.

17. Сторона квадрата равна 1. Прямая проходит на расстоянии $1/2$ от его центра и отсекает от квадрата треугольник. Найдите периметр этого треугольника.



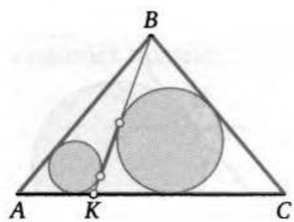
К задаче 17



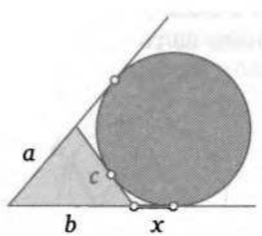
К задаче 18

18. (Формула для отрезка касательной окружности, вписанной в треугольник.) В треугольник вписана окружность. Докажите, что расстояние x от его вершины до ближайшей к ней точки касания, указанное на рисунке, равно $\frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b, c — стороны треугольника, а p — половина периметра треугольника.

19. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли точку K. В треугольники ABK и CBK вписали окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с отрезком BK, если $AK = 2$, $CK = 5$.



К задаче 19



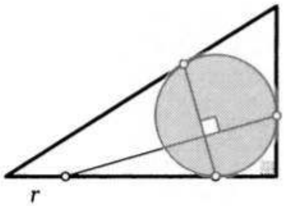
К задаче 20

20. Окружность касается одной стороны треугольника и продолжений двух других. Найдите указанное на рисунке расстояние x от его вершины до одной из точек касания, если стороны треугольника равны a, b, c.

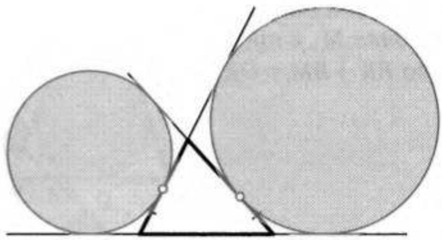
<u>**21.**</u> Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5.

22. Стороны прямоугольного треугольника равны 3, 4, 5. Найдите радиус окружности, касающейся его гипотенузы и продолжений двух катетов.

23. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Через точку ее касания с катетом проведена прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки касания. Эта прямая разбивает второй катет на два отрезка. Докажите, что меньший из них равен радиусу данной окружности.



К задаче 23

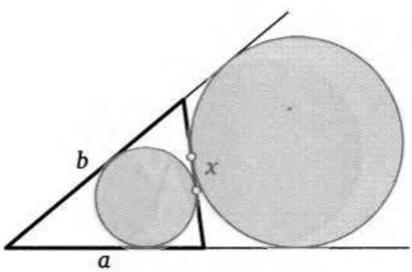


К задаче 24

24. Каждая из двух окружностей касается боковой стороны треугольника и продолжений двух других. Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки равны.

25. Пятиугольник описан вокруг окружности, причем все его стороны равны. Докажите, что все углы пятиугольника тоже равны.

26. Одна из сторон треугольника равна c. В противоположный от нее угол вписаны две окружности, которые касаются данной стороны в двух точках. Найдите расстояние между этими точками, если две другие стороны треугольника равны a и b.

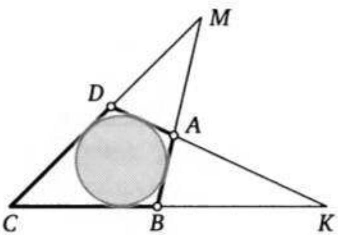


К задаче 26

27. В обозначениях предыдущей задачи найдите расстояние между точками касания двух данных окружностей с одной из сторон угла.

28. Две стороны треугольника равны 5 и 7. В угол, образованный этими сторонами, вписаны две окружности, которые касаются третьей стороны треугольника в двух точках. Найдите его третью сторону, если указанные точки делят ее на три равные части.

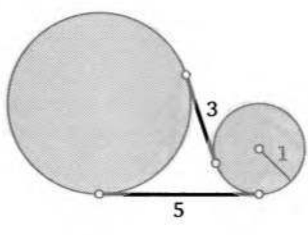
29. Окружность касается всех сторон четырехугольника $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон AB и CD пересекаются в точке M, а продолжения сторон BC и AD — в точке K. Докажите, что $BK + BM = DK + DM$.



К задаче 29

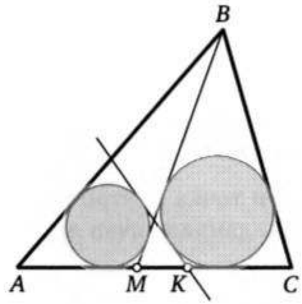
30. Окружность касается двух сторон треугольника и двух медиан, проведенным к этим сторонам. Докажите, что данный треугольник равнобедренный.

31. Радиус одной из окружностей равен 1. Найдите радиус другой окружности, если длины отрезков их общих внутренней и внешней касательных равны 3 и 5.



К задаче 31

***32.** На стороне AC треугольника ABC взяли произвольную точку M. В треугольники ABM и CBM вписали окружности. Общая внутренняя касательная к этим окружностям, отличная от прямой BM, пересекает AC в точке K. Докажите, что точка K не зависит от выбора точки M.



К задаче 32

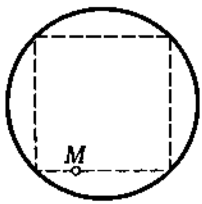
Построение касательных

1. **(Построение касательной.)** С помощью циркуля и линейки постройте касательную к окружности, проходящую через данную точку. Как вы объясните, почему таких касательных не может быть более двух?

2. Придумайте другой способ решения предыдущей задачи.

3. Через данную точку внутри окружности проведите хорду данной длины.

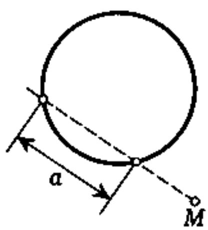
4. Даны окружность и точка внутри нее. Впишите в эту окружность квадрат так, чтобы данная точка лежала на его стороне.



К задаче 4

5. Постройте треугольник, если известны радиус вписанной в него окружности и отрезки, на которые эта окружность делит его сторону.

6. Через данную точку проведите прямую, на которой данная окружность высекала бы хорду, равную данному отрезку.



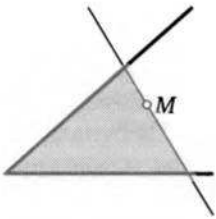
К задаче 6

7. Даны две непересекающиеся окружности. Постройте к ним общую внешнюю касательную.

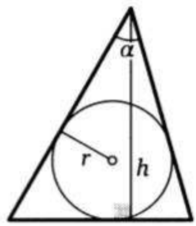
8. Даны две непересекающиеся окружности. Постройте к ним общую внутреннюю касательную.

9. Постройте прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, равные двум данным отрезкам.

10. Через точку, лежащую внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от него треугольник заданного периметра. Всегда ли это возможно?



К задаче 10



К задаче 13

11. Постройте треугольник по одному из его углов, периметру и радиусу вписанной окружности.

12. Постройте треугольник по углу, периметру и высоте, опущенной из данного угла.

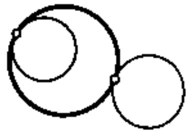
13. Постройте треугольник по углу, радиусу вписанной окружности и высоте, проведенной из данного угла.

14. Постройте такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к двум данным окружностям, были равны данным отрезкам.

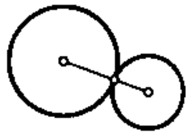
***15.** Даны две непересекающиеся окружности, ни одна из которых не лежит внутри другой. Назовем точку «хорошей», если через нее можно провести прямую, не пересекающую ни одной из этих окружностей. Верно ли, что точка «хорошая», если она лежит вне данных окружностей?

Касание окружностей

Окружности *касаются* друг друга, если они имеют единственную общую точку. Различают случаи *внешнего* и *внутреннего* касания окружностей.



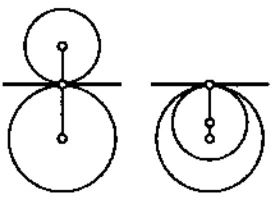
Свойство касающихся окружностей. Точка касания двух окружностей лежит на одной прямой с их центрами.



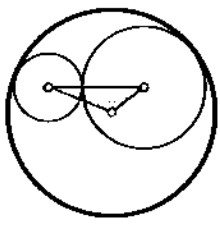
Признак касания окружностей. Если общая точка двух окружностей лежит на одной прямой с их центрами, то окружности касаются.

1. Докажите свойство касающихся окружностей.

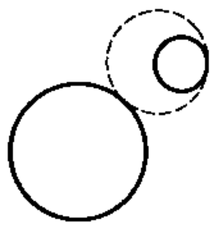
2. Докажите, что в точке касания две окружности имеют общую касательную прямую, а расстояние между центрами окружностей равно сумме или разности их радиусов.



К задаче 2



К задаче 3

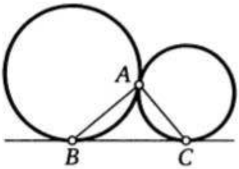


К задаче 4

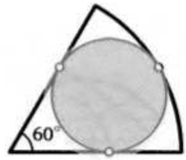
3. Две окружности касаются внешним образом, причем каждая из них касается изнутри окружности радиуса R. Найдите периметр треугольника, образованного центрами этих окружностей.

4. Радиусы двух окружностей равны 2 и 5, а расстояние между их центрами равно 10. Третья окружность касается одной из них внешним образом, а другой — внутренним образом. Докажите, что радиус третьей окружности не меньше 3,5.

5. Две окружности касаются в точке A. Прямая касается обеих окружностей в точках B и C. Найдите угол BAC.



К задаче 5

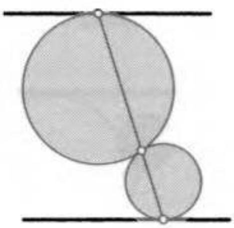


К задаче 6

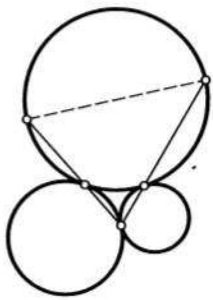
6. Дан сектор круга радиуса R с углом 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в сектор.

7. Две касающиеся окружности вписаны в угол 60°. Найдите отношение их радиусов.

8. Две окружности касаются внешним образом, причем каждая из них касается одной из двух параллельных прямых так, как это показано на рисунке. Докажите, что три получившиеся точки касания лежат на одной прямой.



К задаче 8

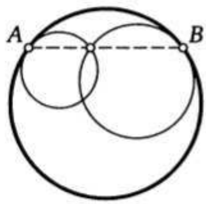


К задаче 9

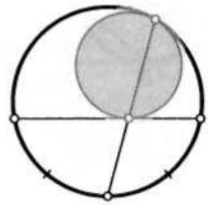
9. Три окружности касаются друг друга внешним образом. Две прямые, проходящие через точки их касания, вторично пересекают одну из этих окружностей в двух точках. Докажите, что эти две точки диаметрально противоположны.

10. В трапецию можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на ее боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.

11. Две окружности с радиусами R и r внутренним образом касаются третьей окружности в точках A и B. Оказалось, что одна из точек их пересечения лежит на отрезке AB. Найдите радиус третьей окружности.



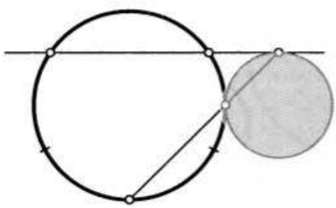
К задаче 11



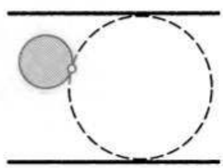
К задаче 12

12. **(Лемма Архимеда.)** Хорда разбивает окружность на две дуги. Другая окружность касается данной хорды и одной из данных дуг. Докажите, что прямая, проходящая через точки ее касания, делит вторую дугу пополам.

13. Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное лемме Архимеда, для случая внешнего касания окружностей, показанного на рисунке.



К задаче 13

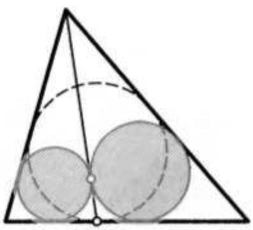


К задаче 14

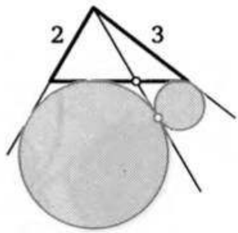
14. Постройте окружность, касающуюся двух параллельных прямых и данной окружности (разберите случаи внешнего и внутреннего касания).

15. Вокруг окружности описан четырехугольник. Диагональ разбивает его на два треугольника. Докажите, что вписанные в них окружности касаются друг друга.

16. В треугольник вписана окружность. Одну из точек касания соединили с противоположной вершиной. Полученный отрезок разбивает данный треугольник на два треугольника. Докажите, что их вписанные окружности касаются.



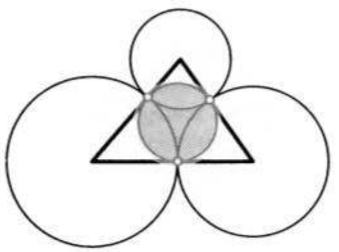
К задаче 16



К задаче 17

17. Две стороны треугольника равны 2 и 3. Через их общую вершину провели прямую так, что отмеченные на рисунке окружности касаются. В каком отношении данная прямая делит третью сторону треугольника, если эта сторона равна 4?

18. Три окружности касаются друг друга внешним образом. Докажите, что окружность, проходящая через три точки их касания, вписана в треугольник, образованный центрами окружностей.

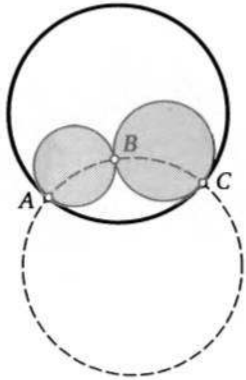


К задаче 18

19. Постройте три окружности, которые попарно касались бы друг друга внешним образом в трех заданных точках.

20. Постройте три окружности, две из которых внешним образом касались бы в точке A, а в точках B и C касались бы изнутри третьей окружности.

***21.** Две окружности внешним образом касаются в точке B, а в точках A и C касаются третьей окружности изнутри. Оказалось, что радиус третьей окружности равен радиусу окружности, проходящей через точки A, B и C. Найдите угол ABC.

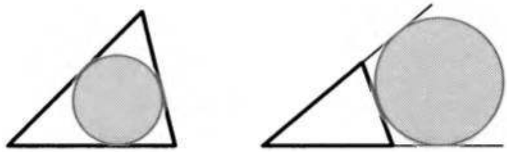


К задаче 21

Биссектрисы пересекаются в одной точке

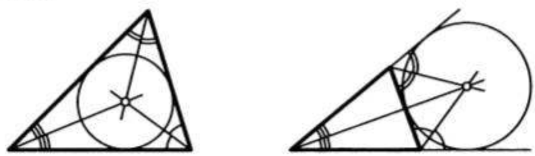
Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Окружность называется *вневписанной* в треугольник, если она касается одной его стороны и продолжений двух других. Всего у треугольника существуют три вневписанные окружности.



вписанная окружность вневписанная окружность

Теорема о вписанной окружности треугольника. В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис всех углов треугольника.



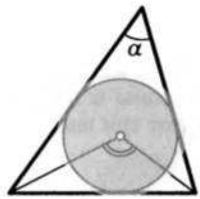
Теорема о вневписанной окружности треугольника. В любом треугольнике существует единственная вневписанная окружность, касающаяся его данной стороны. Центр вневписанной окружности лежит на пересечении биссектрис двух внешних и одного внутреннего угла треугольника.

Теорема об описанном четырехугольнике. Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма длин одной пары его противоположных сторон равнялась сумме длин другой пары.

1. В многоугольник можно вписать окружность. Докажите, что биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке. Верно ли обратное?

2. Докажите терему о вписанной окружности треугольника.

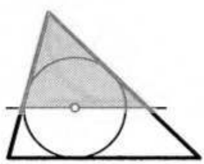
3. Окружность вписана в треугольник. Найдите угол, под которым из ее центра видно его основание, если противоположный основанию угол треугольника равен α.



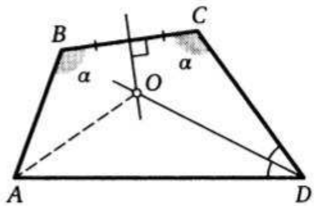
К задаче 3

4. Может ли центр вписанной окружности треугольника лежать на его средней линии?

5. Через центр вписанной окружности треугольника провели прямую, параллельную одной его стороне. Докажите, что эта прямая отсекает от данного треугольника меньший треугольник, периметр которого равен сумме двух сторон данного треугольника.



К задаче 5



К задаче 7

6. Можно ли произвольный треугольник разрезать на шесть равнобедренных треугольников?

7. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и C равны α. Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Найдите $\angle AOD$.

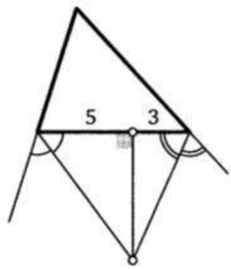
8. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$, все углы которого тупые, $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к его сторонам AB, CD, EF пересекаются в одной точке.

9. Докажите теорему о вневписанной окружности треугольника.

10. Сколько может быть окружностей, касающихся трех данных различных прямых?

11. Точка O — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Найдите $\angle BOC$, если $\angle BAC = \alpha$.

12. Провели биссектрисы двух внешних углов треугольника. Из точки их пересечения на его сторону опустили перпендикуляр. Он делит ее на отрезки с длинами 3 и 5. Найдите разность двух других сторон треугольника.

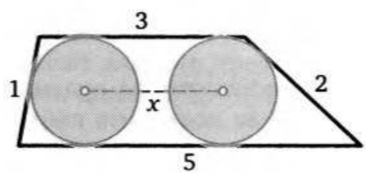


К задаче 12

13. Биссектрисы трех углов четырехугольника пересекаются в одной точке. Длины трех его сторон в указанном порядке равны 3, 4, 6. Найдите четвертую сторону.

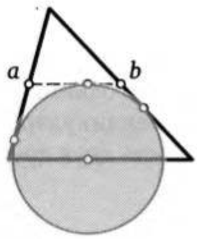
14. Окружность высекает на всех сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке.

15. Основания трапеции равны 3 и 5, а ее боковые стороны равны 1 и 2. Каждая из двух окружностей касается трех сторон трапеции. Найдите расстояние между их центрами.

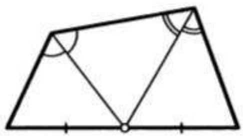


К задаче 15

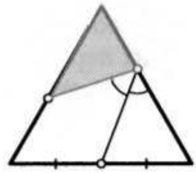
16. Окружность с центром на основании треугольника касается его боковых сторон и средней линии. Найдите основание, если боковые стороны треугольника равны a и b.



К задаче 16



К задаче 17

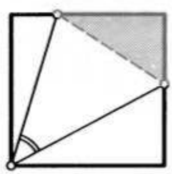


К задаче 18

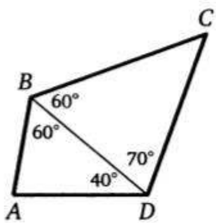
17. Биссектрисы соседних углов четырехугольника пересекаются в середине его стороны. Докажите, что либо у этого четырехугольника равны два угла, либо две стороны параллельны.

18. От угла равностороннего треугольника со стороной 1 отрезали меньший треугольник так, что биссектриса его внешнего угла делит пополам сторону исходного треугольника, противоположную данному углу. Найдите периметр отрезанного треугольника.

19. От квадрата со стороной 1 отрезали треугольник с периметром 2 так, как показано на рисунке. Докажите, что отмеченный на нем угол всегда равен 45°.



К задаче 19

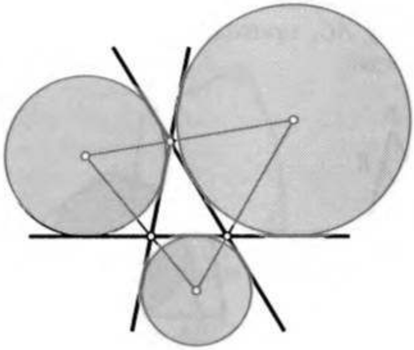


К задаче 21

20. Стороны угла пересекаются за краем бесконечного листа бумаги (полуплоскости). Как построить след его биссектрисы на листе, не выходя за край?

<u>**21.**</u> Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABD = \angle CBD = 60°$, $\angle ADB = 40°$, а $\angle BDC = 70°$. Найдите угол между его диагоналями.

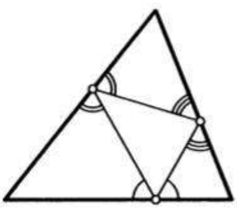
22. Восстановите треугольник по центрам трех его вневписанных окружностей.



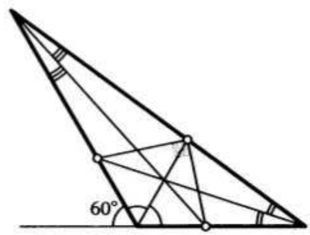
К задаче 22

23. Постройте треугольник по центрам его вписанной и двух вневписанных окружностей.

24. На сторонах треугольника выбраны три точки так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что данные точки — основания высот треугольника.



К задаче 24

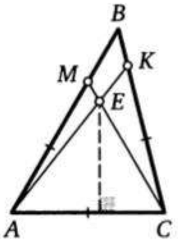


К задаче 26

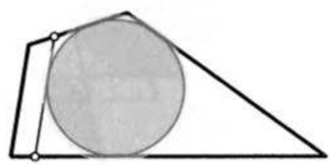
25. Основания высот данного треугольника образуют прямоугольный треугольник. Докажите, что один из углов данного треугольника равен 45°.

26. Один из углов треугольника равен 120°. Докажите, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

27. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и K так, что $AM = AC = CK$. Отрезки AK и CM пересеклись в точке E. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки E на сторону AC, проходит через центр вписанной в треугольник окружности.



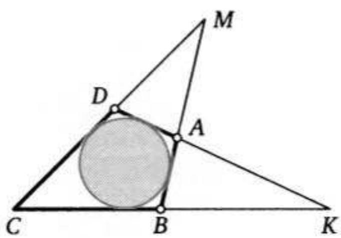
К задаче 27



К задаче 28

28. (Признак описанного четырехугольника.) Суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны. Докажите, что в него можно вписать окружность. (*Для доказательства воспользуйтесь приведенным чертежом.*)

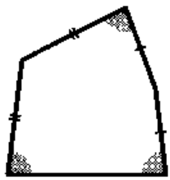
29. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AD и BC — в точке K. Докажите, что если выполняется условие $BK + BM = DK + DM$, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.



К задаче 29

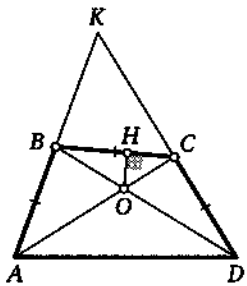
30. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что $AB + CD = BC + DE$, причем его тупые углы A и E равны. Докажите, что биссектрисы трех углов этого пятиугольника пересекаются в одной точке.

***31.** У выпуклого пятиугольника есть три равных острых угла и две пары равных сторон, расположенных так, как это показано на рисунке. Докажите, что в данный пятиугольник можно вписать окружность.



К задаче 31

***32.** Про четырехугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, его диагонали пересекаются в точке O, а продолжения сторон AB и CD — в точке K. Из точки O на сторону BC опущен перпендикуляр OH. Докажите, что $BK + BH = CK + CH$.



К задаче 32

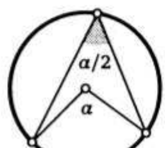
33. Противоположные стороны шестиугольника попарно параллельны, а три его диагонали, соединяющие противолежащие вершины, равны. Докажите, что данный шестиугольник можно вписать в окружность.

Вписанные углы

Любые два луча, выходящие из центра окружности, делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой окружности*. Два плоских угла, образованных данными лучами, называют *центральными*. Величина центрального угла, определяющего данную дугу, называется *градусной мерой дуги*.

Угол называется *вписанным в окружность*, если его вершина лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Говорят, что вписанный угол *опирается на дугу* окружности, если его стороны проходят через концы этой дуги, а вершина не принадлежит дуге.



Теорема о вписанном угле. Величина вписанного в окружность угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Из данной теоремы следует, что все углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну дугу, равны.

Свойство вписанного четырехугольника. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.

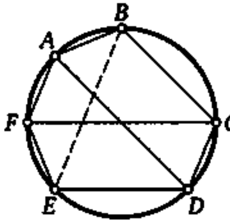
1. Верно ли такое определение вписанного угла: угол называется вписанным в окружность, если он имеет с ней ровно три общие точки?

2. В одну окружность вписаны два равных угла. Докажите, что они опираются на равные хорды. Верно ли обратное?

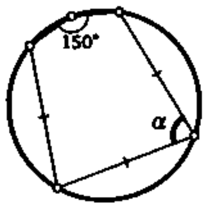
3. Трапеция вписана в окружность. Докажите, что она равнобокая.

4. В окружности проведена хорда, равная ее радиусу. Какова может быть величина угла, вписанного в эту окружность и опирающегося на данную хорду?

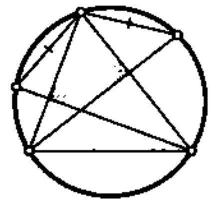
5. В окружность вписали шестиугольник $ABCDEF$. Оказалось, что в нем $AD \parallel BC$, $CF \parallel DE$. Докажите, что тогда $BE \parallel AF$.



К задаче 5



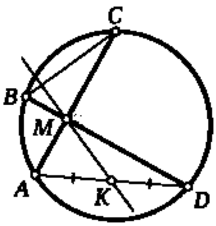
К задаче 6



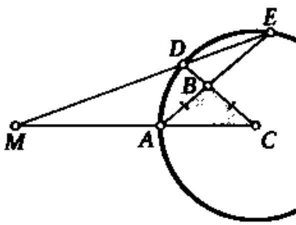
К задаче 7

6. Пятиугольник вписан в окружность. Один его угол равен 150°, а три стороны, не выходящие из вершины данного угла, равны между собой. Найдите угол α между этими сторонами.

7. В треугольнике провели две высоты. Их продолжения пересекают его описанную окружность в двух точках. Докажите, что эти точки равноудалены от третьей вершины треугольника.



К задаче 9



К задаче 10

<u>8.</u> Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — его высота. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

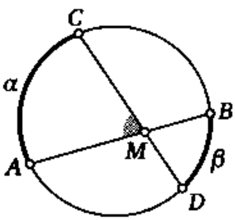
9. В круге через точку M провели две перпендикулярные хорды AC и BD. Точка K — середина отрезка AD. Докажите, что прямые MK и BC перпендикулярны.

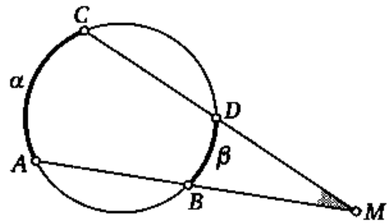
10. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является радиусом окружности. Продолжения боковых сторон треугольника пересекают окружность в точках D и E. Прямые DE и AC пересекаются в точке M. Докажите, что $AM = AE$.

11. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Точка I — центр вписанной в него окружности. Известно, что $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите $\angle AIC$. *Внимание: задача имеет 2 решения!*

12. На основании равнобедренного треугольника взяли произвольную точку. Отрезок, соединяющий ее с противоположной вершиной, делит треугольник на два меньших треугольника. Докажите, что радиусы окружностей, описанных вокруг этих треугольников, равны.

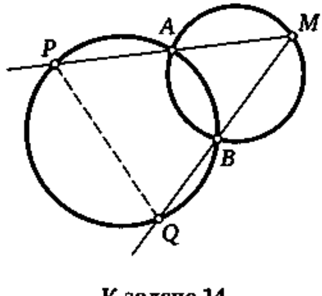
<u>13.</u> Хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке M. Найдите угол AMC, если градусные меры дуг AC и BD равны α и β соответственно. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для случая, когда прямые AB и CD пересекаются вне круга в точке M.





К задаче 13

14. Две окружности пересекаются в точках A и B. На одной из них берется произвольная точка M. Прямые MA и MB пересекают вторую окружность в точках P и Q. Докажите, что длина хорды PQ не зависит от выбора точки M.



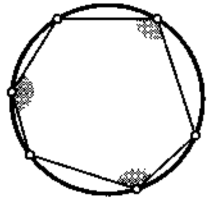
К задаче 14

15. В окружность вписан равносторонний десятиугольник $A_1A_2\ldots A_{10}$. Найдите угол между прямыми: а) A_1A_7 и A_4A_9; б) A_7A_8 и A_3A_5.

16. Биссектрисы двух углов треугольника пересекают описанную вокруг него окружность в точках M и K. Докажите, что отрезок MK перпендикулярен биссектрисе третьего угла треугольника.

17. Докажите свойство вписанного в окружность четырехугольника.

18. Шестиугольник вписан в окружность. Найдите сумму углов при трех его не соседних вершинах.

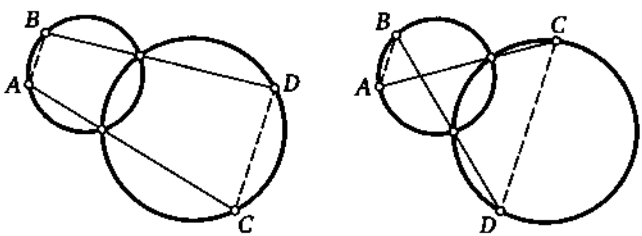


К задаче 18

19. Найдите сумму четырех аналогичных углов для вписанного в окружность восьмиугольника.

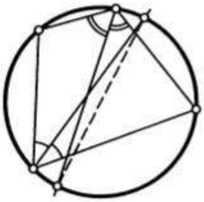
20. Во вписанном четырехугольнике равны два угла при соседних вершинах. Докажите, что у него есть две параллельные стороны.

<u>21</u>. Через точки пересечения двух окружностей проведены две произвольные прямые. Они пересекают первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $AB \parallel CD$ (разберите два случая).

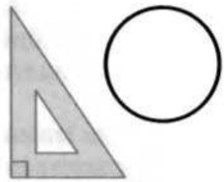


К задаче 21

22. Биссектрисы противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника пересекают ее в двух точках. Докажите, что эти точки диаметрально противоположные.



К задаче 22



К задаче 24

23. В окружности проведены две равные хорды. Докажите, что их концы лежат на параллельных прямых.

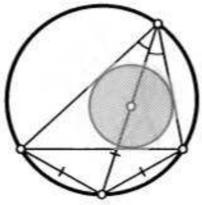
24. Чертежным угольником можно рисовать прямые углы. Как с его помощью построить центр данной окружности?

25. Трапеция с углом 20° при основании вписана в окружность, а ее меньшее основание равно боковой стороне. Найдите радиус окружности, если большее основание трапеции равно 1.

26. Трапеция с основаниями a и b вписана в окружность, а ее боковая сторона видна из центра окружности под углом 120°. Найдите диагонали трапеции.

27. Докажите, что серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса его противоположного угла пересекаются на описанной окружности.

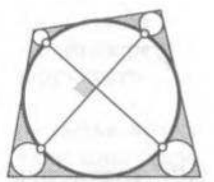
28. (Лемма о трезубце.) Биссектриса треугольника пересекает описанную вокруг него окружность в некоторой точке. Докажите, что данная точка равноудалена от двух вершин треугольника и центра вписанной в него окружности.



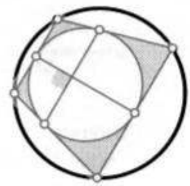
К задаче 28

29. Дан неравнобедренный треугольник. Верно ли, что в нем биссектриса всегда лежит между медианой и высотой, проведенными из одной вершины?

30. В четырехугольник вписана окружность. Четыре меньшие окружности вписаны в углы четырехугольника и касаются первой окружности. Докажите, что отмеченные на чертеже отрезки, соединяющие точки их касания, перпендикулярны.



К задаче 30

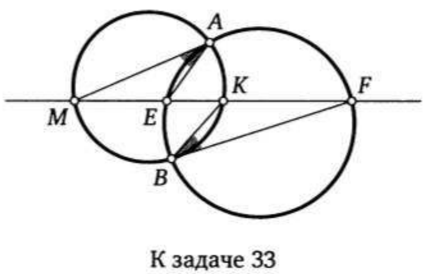


К задаче 31

31. В окружность вписан четырехугольник. Оказалось, что он также описан вокруг другой окружности. Докажите, что два отрезка, соединяющих точки ее касания с противоположными сторонами четырехугольника, перпендикулярны.

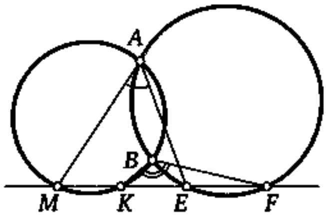
32. Продолжения противоположных сторон AB и CD вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон BC и AD — в точке K. Докажите, что биссектрисы углов AMD и CKD перпендикулярны.

<u>**33.**</u> Две окружности пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая пересекает первую окружность в точках M и K, а вторую — в точках E и F (точка E лежит на отрезке MK, а точка K — на отрезке EF). Докажите, что $\angle MAE = \angle KBF$.



К задаче 33

34. В обозначениях предыдущей задачи для случая, когда точка K лежит на отрезке ME, а точка E — на отрезке KF, докажите, что $\angle MAE + \angle KBF = 180°$.



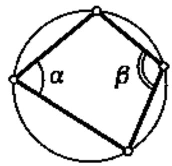
К задаче 34

35. На стороне AC треугольника ABC взяли точку M. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABM и CBM. Оказалось, что точки B, M, O_1 и O_2 лежат на одной окружности. Докажите, что она проходит через середину стороны AC.

36. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на его описанной окружности.

Признаки вписанного четырехугольника

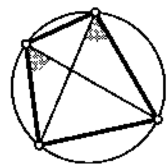
Свойство вписанного четырехугольника. Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.



$\alpha+\beta=180°$

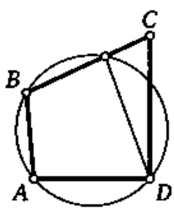
Первый признак вписанного четырехугольника. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то его можно вписать в окружность.

Второй признак вписанного четырехугольника. Если одна сторона выпуклого[20] четырехугольника видна из двух его вершин под равными углами, то этот четырехугольник можно вписать в окружность.

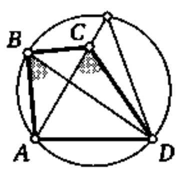


1. Приведите пример четырехугольника, который нельзя вписать в окружность.

2. Используя приведенный чертеж, докажите первый признак вписанного четырехугольника.



К задаче 2



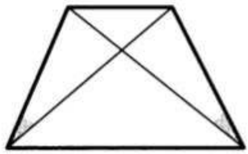
К задаче 3

3. Используя приведенный чертеж, докажите второй признак вписанного четырехугольника.

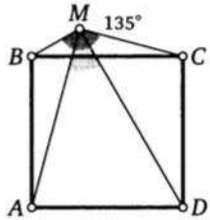
4. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BAC=30°$, $\angle BCA=40°$, $\angle CAD=50°$, $\angle ACD=60°$. Найдите угол между его диагоналями.

[20] Подумайте, почему условие выпуклости четырехугольника существенно.

5. Диагонали трапеции образуют равные углы с ее боковыми сторонами так, как показано на рисунке. Докажите, что трапеция равнобокая.



К задаче 5

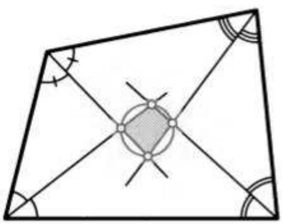


К задаче 6

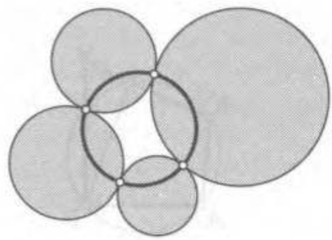
<u>6.</u> Вне квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что угол BMC равен 135°. Найдите угол AMD.

7. Вне равностороннего треугольника ABC взяли точку E так, что угол BEC прямой. Точка M — середина AC. Найдите угол MEC. *Будьте внимательны: в задаче есть разные случаи!*

8. Докажите, что биссектрисы всех углов выпуклого четырехугольника при пересечении образуют вписанный четырехугольник.



К задаче 8



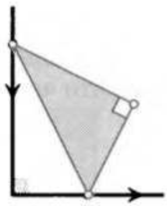
К задаче 9

9. Четыре круга расположены так, что каждый из них касается двух других внешним образом. Докажите, что четыре точки их касания лежат на одной окружности.

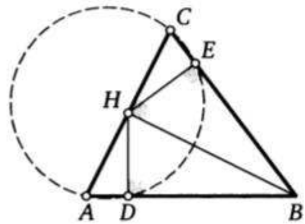
<u>10.</u> В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. Докажите, что угол BKM равен углу ACB.

11. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. Точка O — центр его описанной окружности. Докажите, что $BO \perp MK$.

12. Две вершины прямоугольного треугольника «скользят» по сторонам прямого угла. Докажите, что третья его вершина движется по прямой.



К задаче 12



К задаче 13

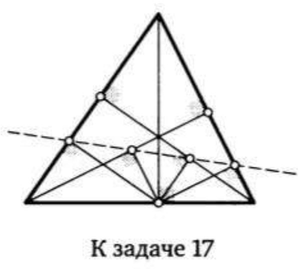
13. В треугольнике ABC провели высоту BH. Точки D и E — проекции точки H на стороны AB и BC. Докажите, что точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

14. (Теорема о высотах треугольника.) Используя вписанные углы, докажите, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

15. Основания высот остроугольного треугольника образуют новый треугольник. Докажите, что в этом треугольнике данные высоты являются биссектрисами.

16. На диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC опущены перпендикуляры BE и CK. Докажите, что точки A, E, K и D лежат на одной окружности.

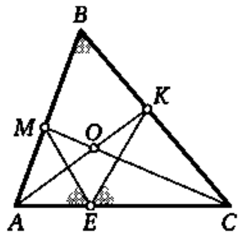
17. В треугольнике провели три высоты. Из основания одной из них опустили перпендикуляры на две другие высоты и на две стороны треугольника. Докажите, что основания всех этих перпендикуляров лежат на одной прямой.



К задаче 17

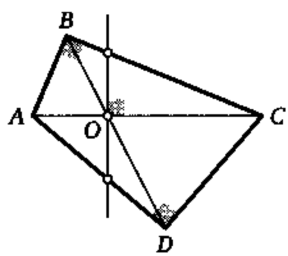
18. Через концы боковой стороны равнобокой трапеции и точку пересечения ее диагоналей провели окружность. Докажите, что она проходит через центр окружности, описанной вокруг трапеции.

19. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M, K и E так, что $\angle AEM = \angle CEK = \angle ABC$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $OMBK$ вписанный.

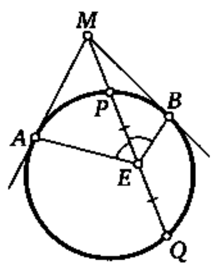


К задаче 19

<u>20.</u> В четырехугольнике $ABCD$ углы B и D прямые. Через точку O пересечения его диагоналей проведена прямая, перпендикулярная AC. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.



К задаче 20

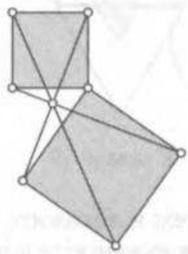


К задаче 21

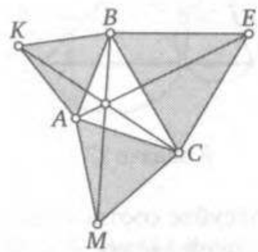
21. Из точки M к окружности проведены касательные MA, MB и произвольная прямая, пересекающая окружность в точках P и Q. Точка E — середина хорды PQ. Докажите, что угол AEM равен углу BEM.

22. Из точки пересечения диагоналей вписанного в окружность четырехугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Докажите, что основания этих перпендикуляров образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность.

23. Два квадрата имеют общую вершину. Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки пересекаются в одной точке.



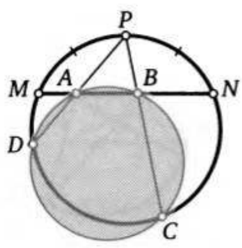
К задаче 23



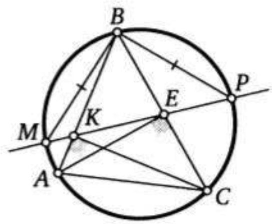
К задаче 24

24. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построили равносторонние треугольники ABK, BCE и ACM. Докажите, что отрезки AE, BM и CK равны и пересекаются в одной точке.

25. Через середину P дуги MN окружности проведены две прямые, пересекающие стягивающую ее хорду в точках A и B, а окружность — в точках C и D. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



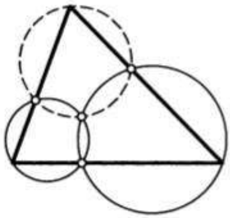
К задаче 25



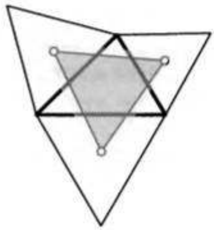
К задаче 26

26. В треугольнике ABC проведены высоты AE и CK. Прямая KE пересекает описанную окружность в точках M и P. Докажите, что $BM = BP$.

<u>27.</u> На каждой стороне треугольника отметили по точке. Докажите, что три отмеченные на рисунке окружности пересекаются в одной точке.



К задаче 27

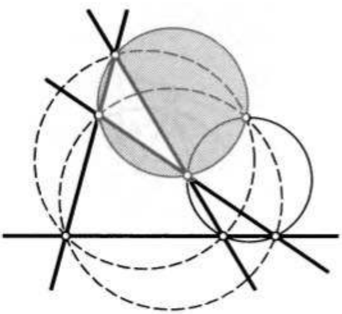


К задаче 29

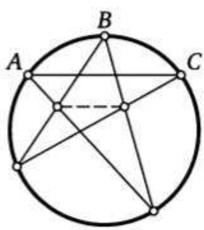
28. Нарисуйте соответствующий чертеж и докажите утверждение предыдущей задачи для случая, когда указанные в ней окружности пересекаются вне треугольника.

29. (Задача Наполеона.) На сторонах произвольного треугольника построили равносторонние треугольники. Докажите, что их центры образуют также равносторонний треугольник.

30. Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные вокруг них, пересекаются в одной точке (*точке Микеля*).



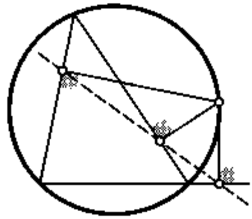
К задаче 30



К задаче 31

31. Пятиугольная звезда вписана в окружность. Отмеченный на рисунке пунктиром отрезок параллелен ее звену AC. Докажите, что тогда $AB = BC$.

32. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (*прямая Симпсона*).

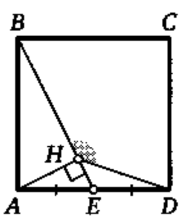


К задаче 32

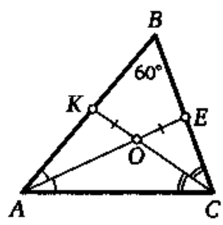
33. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC = 120°$, $\angle ACB = 20°$, $\angle ADB = 40°$ и $\angle BDC = 80°$. Найдите угол между его диагоналями.

34. Биссектриса треугольника делит пополам угол между его медианой и высотой, проведенными из той же вершины. Докажите, что треугольник прямоугольный.

35. Точка E — середина стороны AD квадрата $ABCD$. На отрезок BE опущен перпендикуляр AH. Найдите угол BHD.



К задаче 35

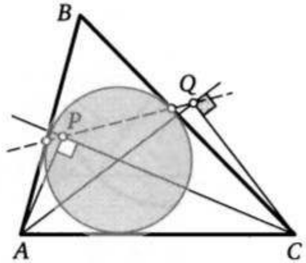


К задаче 36

36. Биссектрисы AE и CK треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что угол ABC равен $60°$. Докажите, что $OE = CK$.

37. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках M и K. Биссектриса угла A пересекает прямую MK в точке E. Докажите, что угол AEC прямой.

38. На биссектрисы углов A и C треугольника ABC опустили перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что прямая PQ проходит через точки касания со сторонами вписанной в треугольник ABC окружности.



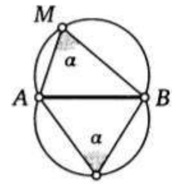
К задаче 38

39. Стороны AB и CD ромба $ABCD$ видны из некоторой точки M под углами 80° и 100°. Под какими углами видны из этой точки стороны AD и BC?

***40.** В треугольнике ABC провели медиану BM. Оказалось, что сумма углов ABM и ACB равна 90°. Докажите, что данный треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

ГМТ с постоянным углом

Теорема. Геометрическим местом точек M, из которых данный отрезок AB виден под постоянным углом α, является объединение двух дуг окружностей с концами в точках A и B.

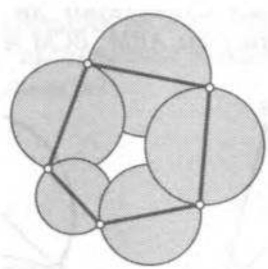


1. Дан отрезок AB и угол α. Постройте все такие точки M, что $\angle AMB = \alpha$.

<u>2.</u> Дан отрезок AB. Где находятся все такие точки M, что $\angle AMB > 90°$?

3. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построили круги. Покроют ли они весь четырехугольник?

4. а) На сторонах выпуклого пятиугольника как на диаметрах построили круги. Может ли существовать точка, покрытая всеми этими кругами? б) Тот же вопрос для невыпуклого пятиугольника.



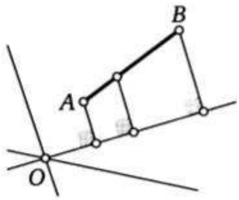
К задаче 4

<u>5.</u> Противоположные углы четырехугольника тупые. Докажите, что соединяющая их диагональ меньше другой его диагонали.

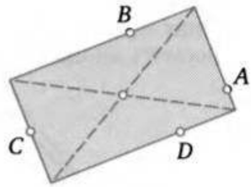
6. Из некоторой точки внутри квадрата две его противоположные стороны видны под прямыми углами. Докажите, что данная точка — центр квадрата.

7. Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

8. На плоскости даны отрезок AB и некоторая точка O. Через точку O проводят произвольные прямые. Из любой точки отрезка AB на каждую из таких прямых опускают перпендикуляр. Что представляет собой множество оснований этих перпендикуляров?



К задаче 8

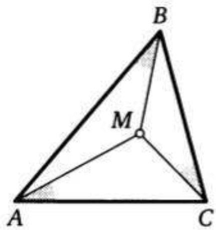


К задаче 9

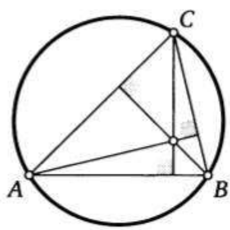
***9.** На плоскости даны четыре точки. Найдите множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

<u>**10.**</u> Дан треугольник. Постройте точку так, чтобы каждая его сторона была видна из этой точки под одним и тем же углом. Для любого ли треугольника есть такая точка?

11. (Точки Брокара.) Существуют ли внутри треугольника ABC такие точки M, что углы ABM, BCM и CAM равны? Сколько таких точек?



К задаче 11



К задаче 12

12. На окружности заданы точки A и B. Точка C движется по окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения: а) высот; б) биссектрис треугольников ABC.

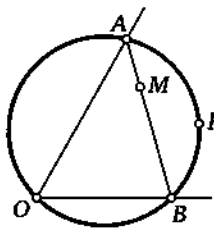
<u>**13.**</u> Постройте треугольник по стороне, противоположному углу и высоте, проведенной из этого угла.

14. Постройте треугольник по стороне, противоположному углу и медиане, проведенной к этой стороне. Может ли задача иметь более двух решений?

15. Постройте параллелограмм по длинам его сторон и углу между диагоналями.

16. Постройте треугольник по стороне, противоположному углу и радиусу вписанной в него окружности.

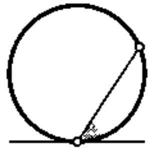
17. Внутри угла с вершиной O даны точки M и K. Через точки O и K проведите окружность так, чтобы она пересекала стороны угла в точках A и B, причем точка M лежала бы на отрезке AB.



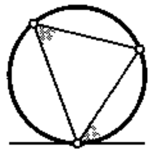
К задаче 17

***18.** Постройте треугольник по его основанию, противоположному углу и медиане, проведенной к боковой стороне. Сколько решений может иметь задача?

Угол между касательной и хордой

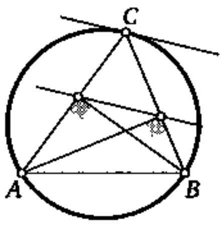


Теорема. Угол между касательной и хордой окружности, проведенными в одной ее точке, равен половине градусной меры дуги окружности, находящейся внутри этого угла.

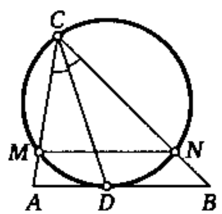


Из теоремы сразу следует, что угол между касательной и хордой равен вписанному в эту окружность углу, опирающемуся на указанную дугу.

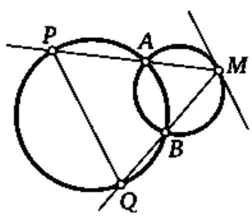
1. Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, параллелен касательной к его описанной окружности, проведенной в вершине треугольника.



К задаче 1



К задаче 2

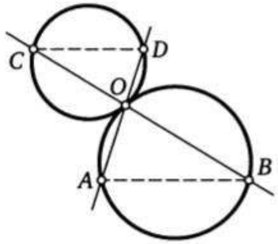


К задаче 3

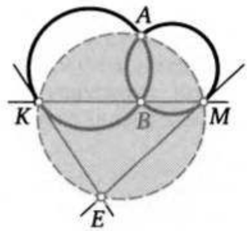
2. Через концы биссектрисы CD треугольника ABC провели окружность, которая касается стороны AB в точке D и пересекает другие его стороны в точках M и N. Докажите, что отрезок MN параллелен стороне AB.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. На одной из них взяли произвольную точку M. Прямые MA и MB вторично пересекают другую окружность в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ параллельна касательной к первой окружности, проведенной в точке M.

<u>4.</u> Через точку касания двух окружностей проводят две произвольные прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что прямые AB и CD параллельны. Разберите также случай внутреннего касания.



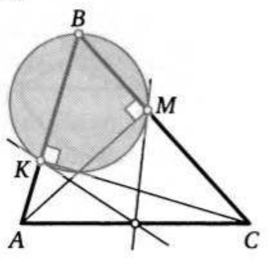
К задаче 4



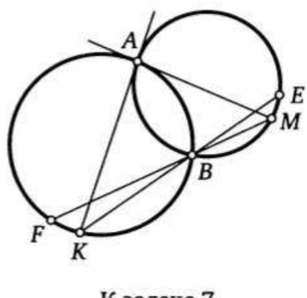
К задаче 5

5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B провели прямую, которая вторично пересекла данные окружности в точках M и K. В этих точках к окружностям провели касательные, которые пересеклись в точке E. Докажите, что точки A, M, E, K всегда лежат на одной окружности.

6. В треугольнике ABC провели высоты AM и CK. Через точки B, K и M провели окружность. Докажите, что касательные к этой окружности, проведенные в точках M и K, пересекаются на стороне AC.



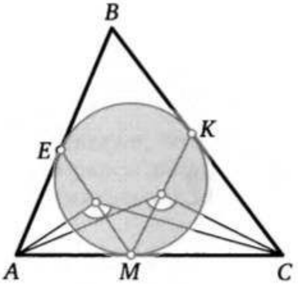
К задаче 6



К задаче 7

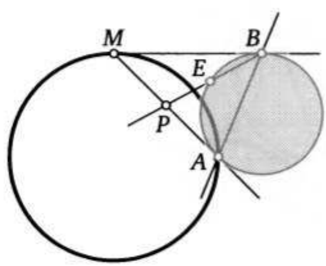
<u>7.</u> Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к ним провели касательные, которые пересекают эти окружности в точках M и K. Прямые BM и KM вторично пересекают данные окружности в точках E и F. Докажите, что $FM = EK$.

8. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его стороны AC в точке M, а двух других его сторон в точках E и K. Докажите, что отрезок AC виден из середин отрезков ME и MK под одинаковым углом.

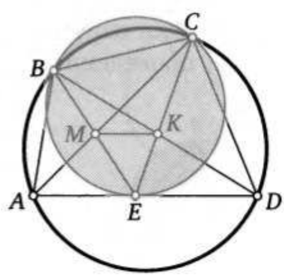


К задаче 8

9. Из точки M к окружности проведены касательные MA и MB. Еще одна окружность проходит через точки M и A и касается прямой AB. Пусть E — точка пересечения данных окружностей, отличная от A. Докажите, что прямая BE делит отрезок AM пополам.



К задаче 9



К задаче 10

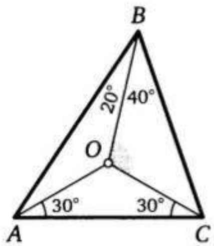
10. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Другая окружность проходит через точки B и C и касается стороны AD в точке E. Отрезки BE и CE пересекают диагонали четырехугольника в точках M и K. Докажите, что прямая MK параллельна AD.

Обратный ход

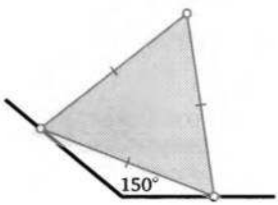
Смысл данного приема заключается в том, что мы угадываем, где лежит данная точка в треугольнике: на пересечении биссектрис, высот, серединных перпендикуляров к его сторонам или других геометрических мест, связанных с треугольником. А потом доказываем, что другой такой точки не существует. Конечно, в каждом конкретном случае не исключено, что задачу можно решить и другим способом.

1. В остроугольном треугольнике ABC взяли точку M так, что $\angle AMC + \angle ABC = 180^\circ$, $\angle AMB + \angle ACB = 180^\circ$. Докажите, что точка M — ортоцентр треугольника ABC.

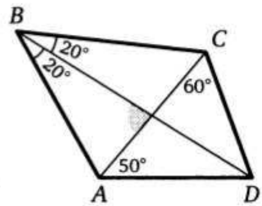
2. В треугольнике ABC взята точка O так, что $\angle ACO = \angle CAO = 30^\circ$, $\angle ABO = 20^\circ$, $\angle CBO = 40^\circ$. Найдите $\angle BOC$.



К задаче 2



К задаче 4



К задаче 6

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle BDC = 2\angle BAC$, $\angle ADB = 2\angle BCA$. Докажите, что треугольник ADC равнобедренный.

4. Две вершины равностороннего треугольника скользят по разным сторонам угла, равного 150°. По какой траектории движется его третья вершина?

5. В треугольнике ABC взята точка M так, что $\angle MAC = 20^\circ$, $\angle MCA = 30^\circ$, а углы ABM и CBM равны 40°. Найдите $\angle BMC$.

6. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle DAC = 50^\circ$, $\angle DCA = 60^\circ$, а углы ABD и CBD равны 20°. Найдите угол между его диагоналями.

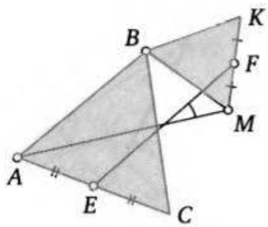
7. На медиане BM треугольника ABC взяли точку O так, что $\angle AOC + \angle ABC = 180^\circ$. Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников ABO и CBO, касаются прямой AC.

8. В четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются в точке M. Оказалось, что $\angle BMC + \angle AMD = 180^\circ$. Докажите, что в данный четырехугольник можно вписать окружность.

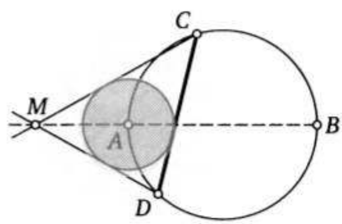
9. Четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность. Сколько существует внутри него таких точек M, что $\angle ABM = \angle DCM$, $\angle CBM = \angle DAM$?

10. Точка O — центр окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Перпендикуляры, восстановленные в его вершинах к отрезкам AO, BO, CO и DO, образуют новый четырехугольник. Докажите, что точка O лежит на пересечении диагоналей нового четырехугольника.

11. Равносторонние треугольники ABC и BMK имеют общую вершину. Точки E и F — середины отрезков AC и KM соответственно. Найдите угол между прямыми AM и EF.



К задаче 11



К задаче 12

12. Отрезок AB является диаметром окружности и пересекает ее хорду CD. Другая окружность имеет центр в точке A и касается хорды CD. К этой окружности из точек C и D провели касательные. Докажите, что они пересекаются на прямой AB.

***13.** Один катет и гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника видны из некоторой точки под углами 135°. Докажите, что данная точка лежит на медиане треугольника.

Площади

Площадью фигуры называют число, показывающее, сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре. Для площадей справедливы свойства (или аксиомы), аналогичные аксиомам отрезков[21].

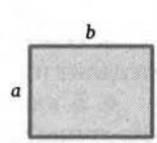
Аксиомы площади

1. Площадь любой фигуры является неотрицательным числом.

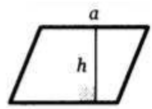
2. Равные фигуры имеют равные площади.

3. Если фигура составлена из двух неперекрывающихся частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

4. Площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, равна 1.



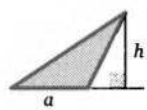
$S=ab$



$S=ah$

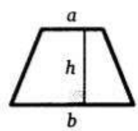
Теорема о площади прямоугольника. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

Теорема о площади параллелограмма. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



$S=ah/2$

Теорема о площади треугольника. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.



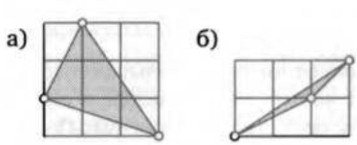
$S=(a+b)h/2$

Теорема о площади трапеции. Площадь трапеции равна произведению ее высоты на среднюю линию.

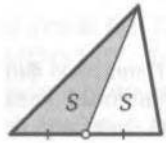
1. В одном футе 12 дюймов. Сколько квадратных дюймов в квадратном футе?

[21] По сути можно сказать, что площадь — это числовая функция, заданная на множестве плоских фигур и удовлетворяющая четырем указанным аксиомам.

2. Сколько клеток составляет площадь закрашенного треугольника на рисунках?



К задаче 2

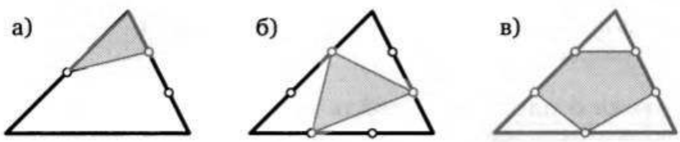


К задаче 3

3. (Свойство медианы треугольника.) Докажите, что медиана делит площадь треугольника пополам.

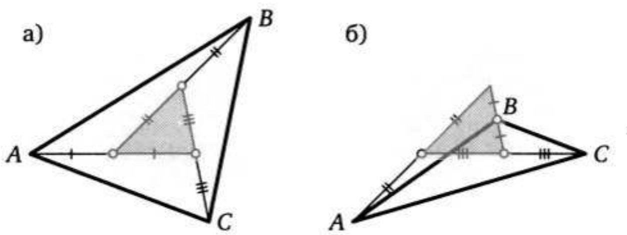
4. В каком отношении делит площадь треугольника его средняя линия?

5. Площадь треугольника равна 1. Каждая его сторона отмеченными точками делится на равные части. Найдите площади закрашенных фигур на рисунках.



К задаче 5

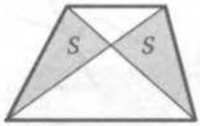
6. Площади закрашенных треугольников равны 1. Их стороны продолжили так, как показано на рисунках. Найдите площадь треугольника ABC.



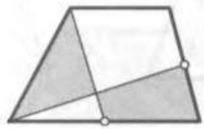
К задаче 6

7. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих частей.

8. (Лемма о «крыльях бабочки».) Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что площади двух треугольников, прилегающих к ее боковым сторонам, равны. Сформулируйте обратное утверждение и докажите его.



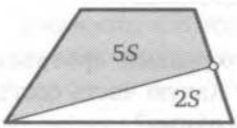
К задаче 8



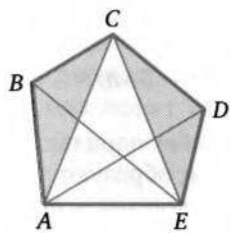
К задаче 9

9. Отмеченные на рисунке точки — середины сторон трапеции. Докажите, что площади закрашенных фигур равны.

10. Вершину трапеции соединили с серединой другой боковой стороны. Известно, что полученный отрезок делит ее площадь в отношении 2 : 5. Найдите отношение оснований трапеции.



К задаче 10



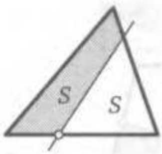
К задаче 12

11. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что две стороны четырехугольника параллельны.

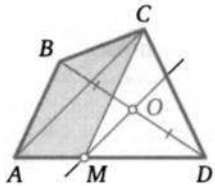
12. В пятиугольнике $ABCDE$ стороны BC и CD параллельны соответственно диагоналям AD и BE. Докажите, что треугольники ABC и CDE равновелики.

13. В пятиугольнике $ABCDE$ стороны AB, BC и CD параллельны диагоналям CE, AD и BE соответственно. Верно ли, что треугольники ABE и CDE равновелики?

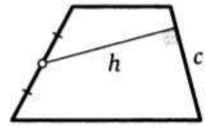
14. Через данную точку на стороне треугольника проведите прямую так, чтобы она делила его площадь пополам. Сколько таких прямых можно провести?



К задаче 14



К задаче 15



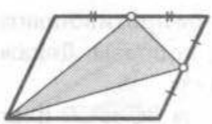
К задаче 16

15. Через точку O — середину диагонали BD четырехугольника $ABCD$ параллельно его диагонали AC провели прямую. Она пересекла сторону AD в точке M. Докажите, что отрезок CM делит площадь четырехугольника пополам.

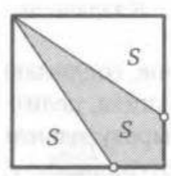
16. Боковая сторона трапеции равна c, а расстояние до нее от середины другой боковой стороны h. Найдите площадь трапеции.

Задачи с параллелограммами

17. Вершина параллелограмма и середины противоположных от нее сторон образуют треугольник. Какую часть составляет его площадь от площади всего параллелограмма?



К задаче 17

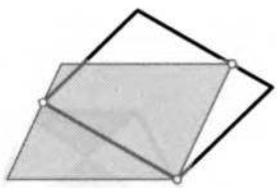


К задаче 18

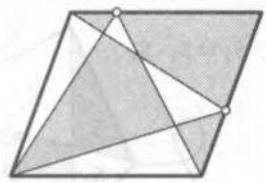
18. Как разрезать квадрат по двум прямым, проходящим через его вершину, на три равновеликие части?

19. Точку внутри параллелограмма соединили со всеми его вершинами. Полученные отрезки разбили его на четыре треугольника. Площади трех из них, взятые по порядку, равны 2, 4 и 5. Найдите площадь четвертого.

20. Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что их площади равны.



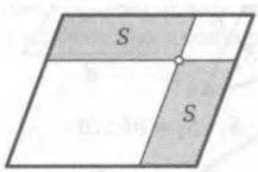
К задаче 20



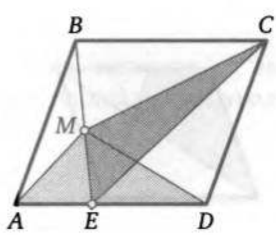
К задаче 21

21. Две точки на сторонах параллелограмма соединили с тремя его вершинами так, как это показано на рисунке. Докажите, что площадь одной из закрашенных на рисунке частей равна сумме площадей других.

22. Параллелограмм разрезали на четыре меньших параллелограмма. Два из них, закрашенные на рисунке, имеют равные площади. Докажите, что их общая вершина лежит на диагонали большого параллелограмма.



К задаче 22

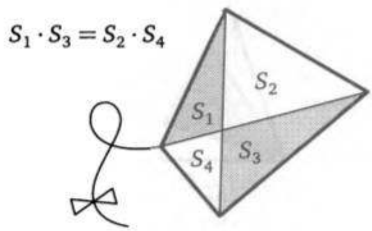


К задаче 23

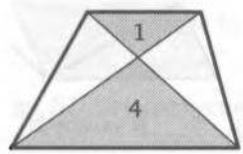
23. Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли произвольную точку M. Прямая BM пересекает AD в точке E. Докажите, что площади треугольников AMD и CME равны.

Отношение площадей треугольников с равным углом

24. (Лемма о «воздушном змее».) Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух треугольников, прилегающих к его противоположным сторонам, равно произведению площадей других двух треугольников.



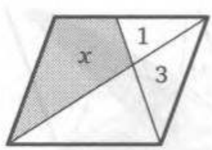
К задаче 24



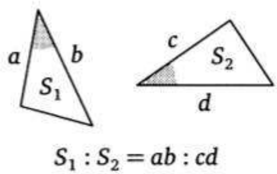
К задаче 25

25. Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Площади двух из них, прилегающих к основаниям, равны 1 и 4. Найдите площадь трапеции.

26. В параллелограмме провели диагональ, а через не лежащую на ней вершину — прямую. Они разбили параллелограмм на три треугольника и четырехугольник. Площади двух треугольников на рисунке равны 1 и 3. Найдите площадь четырехугольника.



К задаче 26

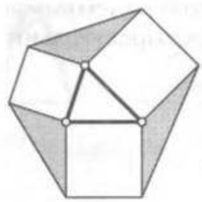


К задаче 27

27. (Теорема об отношении площадей треугольников с равным углом.) Два треугольника имеют по равному углу. Докажите, что их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол.

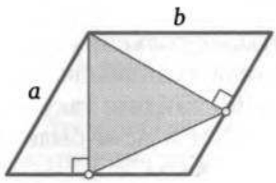
28. Докажите утверждение, аналогичное предыдущей теореме, но для случая, когда углы дополняют друг друга до 180°.

29. На сторонах треугольника построили квадраты. Докажите, что закрашенные треугольники на рисунке равновелики.



К задаче 29

30. Из вершины параллелограмма на две его противоположные стороны опустили высоты. Найдите площадь треугольника, образованного этими высотами, если стороны параллелограмма равны a и b, а его площадь равна S.



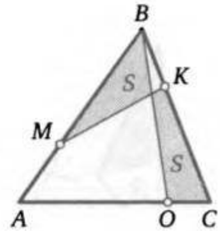
К задаче 30

***31.** Каждая диагональ пятиугольника отсекает от него треугольник единичной площади. Найдите площадь пятиугольника.

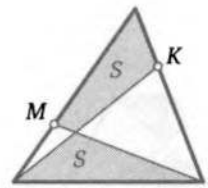
К задаче 31

Расчет частей треугольника

32. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки M и K так, что $AM : MB = BK : KC = 1 : 2$. Вершину B соединили отрезком с такой точкой O на стороне AC, чтобы площади закрашенных на рисунке треугольника и четырехугольника были равны. Найдите $AO : OC$.



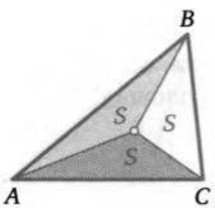
К задаче 32



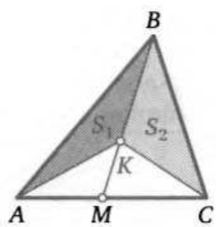
К задаче 33

33. Точки M и K на сторонах треугольника соединили с противоположными вершинами. Оказалось, что закрашенные на рисунке треугольник и четырехугольник равновелики. Докажите, что точки M и K делят стороны в одинаковом отношении.

34. В треугольнике ABC найдите такую точку M, чтобы площади треугольников ABM, BCM и ACM были равны. Существуют ли такие точки вне треугольника?



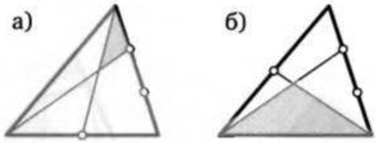
К задаче 34



К задаче 35

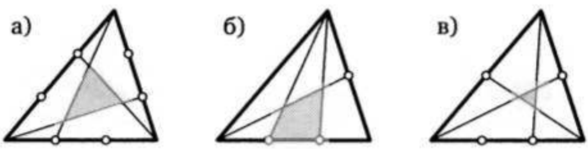
35. **(«Лемма о бумажном самолетике».)** На стороне AC треугольника ABC взяли произвольную точку M. На отрезке BM взяли произвольную точку K. Докажите, что площади треугольников ABK и CBK относятся как $AM : MC$.

36. Каждую сторону треугольника разделили на равные части. Какую часть его площади составляют закрашенные треугольники на рисунках?



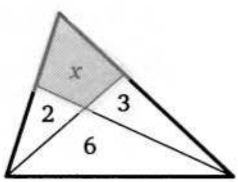
К задаче 36

37. Каждую сторону треугольника разделили на равные части. Какую часть его площади составляют закрашенные фигуры на рисунках?

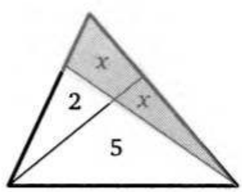


К задаче 37

38. Две прямые делят треугольник на три треугольника и один четырехугольник. На рисунке цифрами обозначены площади треугольников. Найдите площадь четырехугольника.



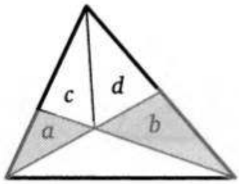
К задаче 38



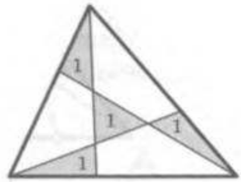
К задаче 39

39. Две прямые делят треугольник на три треугольника и четырехугольник. Площади двух треугольников на рисунке равны 2 и 5. Найдите площадь четырехугольника, если он равновелик третьему треугольнику.

40. Буквы на рисунке обозначают площади треугольников. Докажите, что, если $a=b$, то $c=d$.



К задаче 40

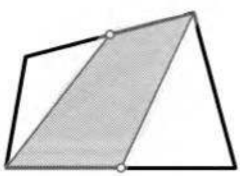


К задаче 41

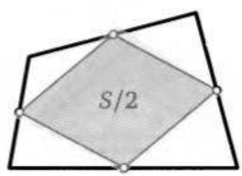
***41.** Через каждую вершину треугольника провели прямую. Эти прямые разбивают треугольник на четыре меньших треугольника и три четырехугольника. Площади каждого из указанных треугольников равны 1. Докажите, что площади всех четырехугольников равны и найдите площадь исходного треугольника.

Группировка площадей

42. Середины двух противоположных сторон четырехугольника соединили с двумя его вершинами так, как это показано на рисунке. Какую часть от площади исходного четырехугольника составляет закрашенная фигура?



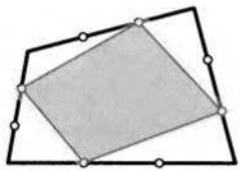
К задаче 42



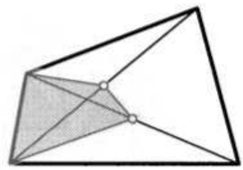
К задаче 43

43. В четырехугольнике отметили середины всех сторон. Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в этих точках составляет половину площади исходного четырехугольника.

44. Каждую сторону выпуклого четырехугольника разделили на три равные части. Соответствующие точки соединили так, как это показано на рисунке. Какую часть исходного четырехугольника составляет закрашенная фигура?



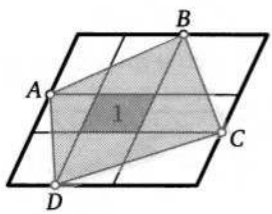
К задаче 44



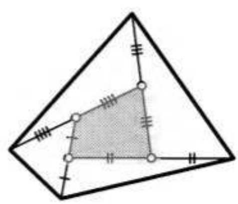
К задаче 45

45. Середины диагоналей выпуклого четырехугольника соединили с двумя его вершинами так, как это показано на рисунке. Какую часть от площади четырехугольника составляет закрашенная фигура?

46. Параллелограмм разбили на девять меньших параллелограммов так, как это показано на рисунке. Найдите площадь четырехугольника *ABCD*, если площадь центрального параллелограмма равна 1, а площадь исходного — 13.



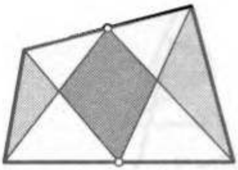
К задаче 46



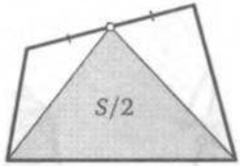
К задаче 47

<u>47.</u> Площадь закрашенного четырехугольника равна 1. Все его стороны продолжили на свою длину так, как это показано на рисунке. Найдите площадь получившегося большого четырехугольника.

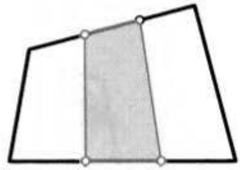
48. Вершины четырехугольника соединили с серединами его сторон так, как показано на рисунке. Докажите, что площадь закрашенного четырехугольника равна сумме площадей закрашенных треугольников.



К задаче 48



К задаче 49

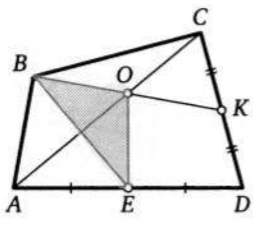


К задаче 50

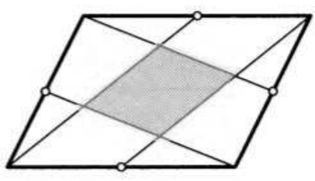
49. Середину стороны четырехугольника соединили с противоположными вершинами. Оказалось, что полученный треугольник составляет половину его площади. Докажите, что у четырехугольника две стороны параллельны.

50. Две противоположные стороны выпуклого четырехугольника разделили на три равные части. Соответствующие точки деления соединили так, как показано на рисунке. Докажите, что между получившимися отрезками находится ровно треть площади исходного четырехугольника.

51. Точки E и K — середины сторон AD и CD четырехугольника $ABCD$. Отрезок BK пересекает диагональ AC в точке O. Докажите, что площадь треугольника OBE в два раза меньше площади треугольника ABC.



К задаче 51

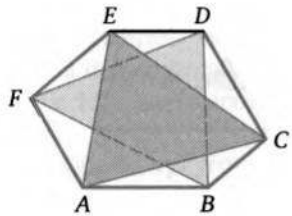


К задаче 52

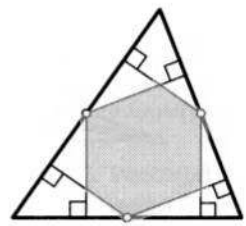
52. Вершины параллелограмма соединили с серединами его сторон так, как показано на рисунке. Какую часть площади параллелограмма составляет закрашенная фигура в центре?

53. Из медиан треугольника составили новый треугольник. Как относятся их площади?

54. Противоположные стороны шестиугольника $ABCDEF$ попарно параллельны. Докажите, что треугольники ACE и BDF равновелики.



К задаче 54

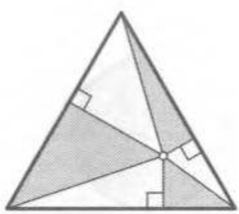


К задаче 55

55. Площадь треугольника равна 1. Из середины каждой стороны треугольника опустили перпендикуляры на другие его стороны. Найдите площадь образованного ими шестиугольника.

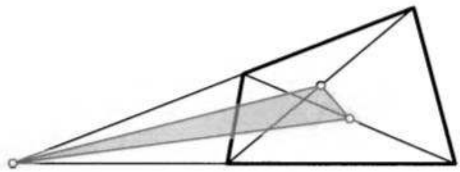
***56.** Окружность с радиусом r вписана в треугольник. Она касается его сторон в точках M, E, K. Найдите площадь треугольника MEK, если площадь исходного треугольника равна S, а его стороны равны a, b, c.

***57.** Внутри равностороннего треугольника взяли точку. Ее соединили со всеми его вершинами, а также опустили перпендикуляры на все стороны. Получившиеся при этом шесть треугольников покрасили в черный и белый цвета так, как это показано на рисунке. Докажите, что сумма площадей черных треугольников равна сумме площадей белых.



К задаче 57

***58.** Середины диагоналей выпуклого четырехугольника соединили с точкой пересечения продолжений двух его противоположных сторон. Докажите, что площадь получившегося треугольника равна 1/4 площади четырехугольника.



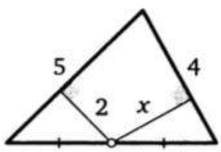
К задаче 58

Применение площадей

<u>**1.**</u> Внутри выпуклого равностороннего многоугольника движется точка. Докажите, что сумма расстояний от нее до его сторон (или их продолжений) постоянна.

<u>**2.**</u> Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а его гипотенуза — c. Найдите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу.

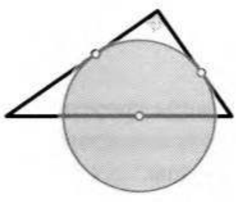
3. Две стороны треугольника равны 4 и 5. Расстояние от середины третьей его стороны до большей из них равно 2. Чему равно расстояние до меньшей стороны?



К задаче 3

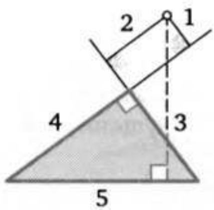
<u>**4.**</u> Стороны прямоугольного треугольника равны 6, 8 и 10. Внутри него взяли точку на расстоянии 1 от каждого катета. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

5. Окружность касается катетов прямоугольного треугольника, а ее центр лежит на гипотенузе. Найдите радиус данной окружности, если катеты равны a и b.

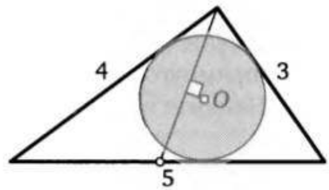


К задаче 5

6. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 называется египетским. Вне египетского треугольника взяли точку так, что расстояния от нее до продолжений его катетов равны 1 и 2 (см. рисунок). Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.



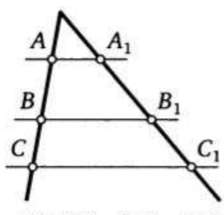
К задаче 6



К задаче 7

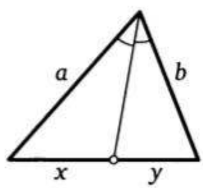
7. Стороны прямоугольного треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите расстояние от центра его вписанной окружности до медианы, проведенной к гипотенузе.

8. (Лемма о пропорциональных отрезках.) Несколько параллельных прямых пересекают стороны угла. Докажите, что отношение отрезков, которые они высекают на одной стороне угла, равно отношению соответствующих отрезков на другой его стороне.



$AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$

К задаче 8



$x/y = a/b$

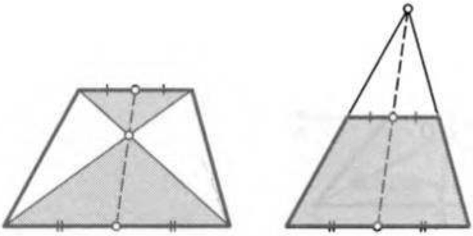
К задаче 9

9. (Свойство биссектрисы треугольника.) Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

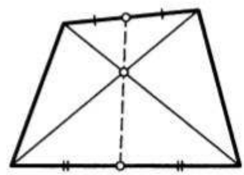
10. Методом площадей докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

11. (Замечательное свойство трапеции.) а) Докажите, что середины оснований и точка пересечения диагоналей любой трапеции лежат на одной прямой.

б) Докажите, что на той же прямой лежит точка схода ее боковых сторон (пересечение их продолжений).



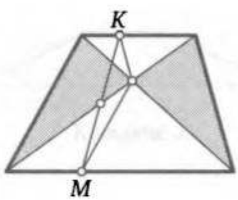
К задаче 11



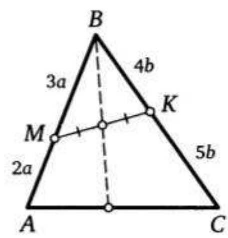
К задаче 12

12. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей. Верно ли, что это трапеция или параллелограмм?

13. Через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно ее боковым сторонам провели две прямые. Первая из них пересекла одно ее основание в точке M, а вторая — другое основание в точке K. Докажите, что отрезок MK делит одну из диагоналей трапеции пополам.



К задаче 13

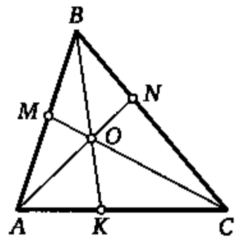


К задаче 14

14. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и K, так что $AM/MB = 2/3$, $BK/KC = 4/5$. Через середину отрезка MK и вершину B провели прямую. В каком отношении она делит сторону AC?

15. (Теорема Чевы.) а) Внутри треугольника ABC взяли произвольную точку O. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, AC и AB в точках N, K и M соответственно. Докажите, что верно соотношение $AM/BM \cdot BN/CN \cdot CK/AK = 1$.

б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

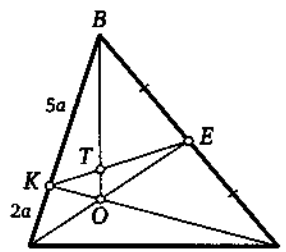


К задаче 15

16. Вписанная в треугольник окружность касается его сторон в трех точках. Каждую из них соединили с противоположной вершиной. Докажите, что три полученных отрезка пересекаются в одной точке.

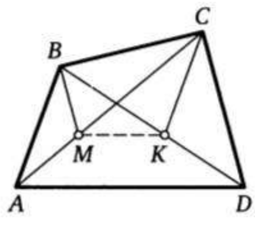
17. Используя теорему Чевы, еще раз докажите, что все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

18. На стороне AB треугольника ABC взяли точку K так, что $AK : BK = 2 : 5$. Точка E — середина стороны BC. Отрезки AE и CK пересекаются в точке O, отрезки KE и BO пересекаются в точке T. Найдите $KT : TE$.



К задаче 18

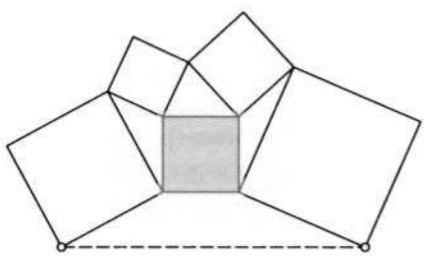
19. На диагоналях AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты такие точки M и K, что BM параллельно CD, а CK параллельно AB. Докажите, что отрезок MK параллелен AD.



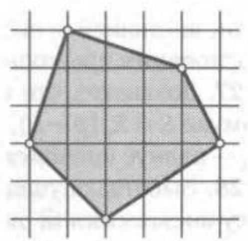
К задаче 19

20. Четыре диагонали пятиугольника соответственно параллельны четырем его сторонам. Докажите, что пятая диагональ пятиугольника также параллельна его стороне.

21. Квадраты расположены так, как показано на рисунке. Верно ли, что пунктирный отрезок всегда параллелен стороне «центрального» квадрата?



К задаче 21



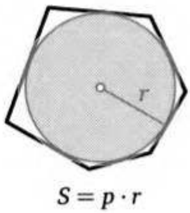
К задаче 22

22. На клетчатой бумаге нарисовали многоугольник, вершины которого лежат в узлах, а стороны не проходят по ее линиям. Докажите, что сумма всех горизонтальных отрезков сетки, заключенных внутри многоугольника, равна сумме всех вертикальных.

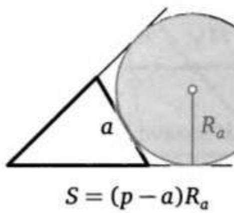
23. В треугольнике ABC взяли произвольную точку M. Прямые AM, BM и CM пересекают стороны в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $MA_1/AA_1 + MB_1/BB_1 + MC_1/CC_1 = 1$.

Формула для площади описанного многоугольника

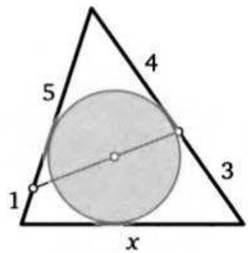
24. (Формула для площади описанного многоугольника.) Многоугольник описан вокруг окружности с радиусом r. Докажите, что его площадь можно вычислять по формуле $S = pr$, где p — половина периметра многоугольника.



К задаче 24



К задаче 27



К задаче 30

25. Высоты треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите радиус его вписанной окружности.

26. Радиус вписанной окружности треугольника равен 1, а высота, опущенная на его основание, равна 3. Найдите радиус окружности, касающейся его боковых сторон, центр которой находится на основании треугольника.

27. Докажите, что площадь треугольника можно вычислять по формуле $S = R_a(p - a)$, где p — половина периметра треугольника, а R_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a.

28. Высота, опущенная на основание треугольника, равна радиусу вневписанной окружности, касающейся этой стороны. Докажите, что основание равно среднему арифметическому двух других сторон треугольника.

29. Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника, а R_a, R_b, R_c — радиусы его вневписанных окружностей. Докажите, что $1/r = 1/R_a + 1/R_b + 1/R_c$.

30. Прямая делит одну боковую сторону треугольника на отрезки с длинами 5 и 1, а другую — на отрезки с длинами 4 и 3, считая от общей вершины. Найдите основание треугольника, если известно, что на данной прямой лежит центр вписанной в треугольник окружности.

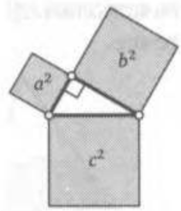
31. Стороны треугольника равны 4, 5 и 6. Через середину его большей стороны и центр вписанной окружности провели прямую. В каком отношении она делит другую сторону треугольника?

32. Некоторая прямая делит площадь и периметр треугольника пополам. Докажите, что все такие прямые пересекаются в одной точке.

Теорема Пифагора

В современной формулировке эта знаменитая теорема звучит так: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

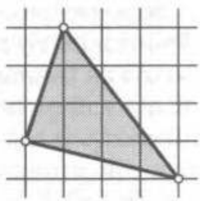
Древние же греки, которые все переводили на геометрический язык, говорили так: площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.



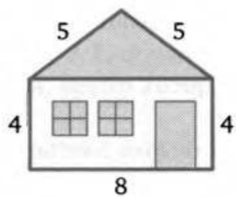
$a^2 + b^2 = c^2$

1. Покажите на клетчатой бумаге два узла, не лежащие на одной линии сетки, расстояние между которыми равно 5 клеткам.

2. Верно ли, что треугольник, изображенный на клетчатой бумаге, прямоугольный?



К задаче 2



К задаче 4

3. На клетчатой бумаге нарисуйте квадрат так, чтобы все его вершины лежали в узлах сетки, а площадь равнялась бы 41 клетке.

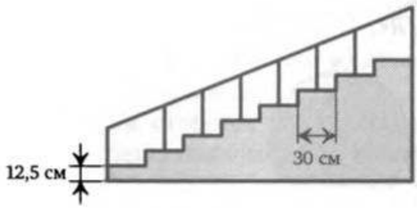
4. Определите высоту дома, ширина фасада которого равна 8 метрам, высота от фундамента до крыши равна 4 метрам, а длина ската крыши равна 5 метрам.

5. Основания равнобокой трапеции равны 1 и 2, а ее площадь равна 3. Найдите диагональ трапеции.

6. Стороны треугольника равны 5, 12 и 13. Докажите, что он прямоугольный.

7. Две стороны треугольника равны 3 и 5, а медиана, проведенная к третьей, равна 2. Найдите площадь треугольника.

8. Лестница состоит из 40 ступеней. Высота каждой ступени равна 12,5 см, ширина — 30 см. Определите длину перил лестницы.



К задаче 8

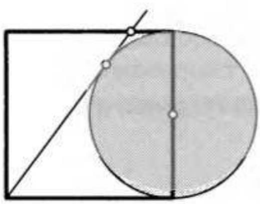
9. Даны три отрезка с длинами a, b и c. Как циркулем и линейкой построить отрезок, равный $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$?

10. Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. В каком отношении делит его высота бóльшую из них?

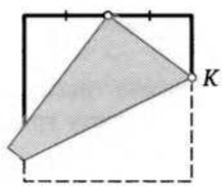
11. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, а его основание равно 6. Найдите радиус описанной окружности.

12. Основания равнобокой трапеции равны 6 и 8, а ее высота равна 1. Найдите радиус описанной окружности трапеции.

13. На стороне квадрата как на диаметре построена окружность. Из его вершины, не лежащей на окружности, к ней проведена касательная. В каком отношении эта касательная делит сторону квадрата?



К задаче 13

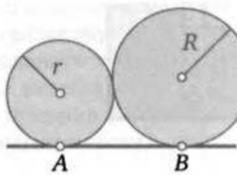


К задаче 14

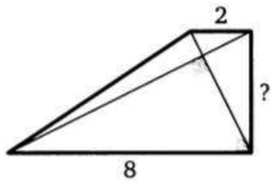
14. Бумажный квадрат перегнули так, что одна его вершина оказалась в середине не содержащей ее стороны. В каком отношении точка K, лежащая на линии сгиба, делит сторону квадрата?

15. На сколько километров удалена от человека, стоящего на берегу моря, линия горизонта? (Средний рост человека — 1,7 м, радиус Земли — 6400 км.)

16. Две окружности радиусов R и r касаются друг друга внешним образом, а также одной прямой в точках A и B. Докажите, что расстояние между точками их касания с прямой вычисляется по формуле $AB=2\sqrt{Rr}$.



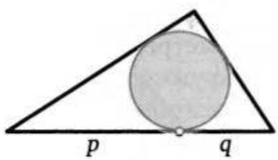
К задаче 16



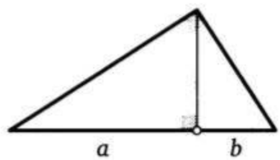
К задаче 17

17. Диагонали прямоугольной трапеции перпендикулярны, а ее основания равны 2 и 8. Найдите высоту трапеции.

18. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки с длинами p и q. Найдите площадь треугольника.



К задаче 18



К задаче 20

19. Диагонали трапеции перпендикулярны, а их длины равны 6 и 8. Найдите высоту трапеции.

Среднее геометрическое

20. Найдите высоту прямоугольного треугольника, если длины отрезков, на которые она разбивает гипотенузу, равны a и b.

21. Геометрически докажите, что $\sqrt{ab}\leqslant(a+b)/2$.

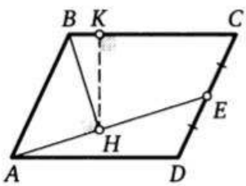
22. Даны два отрезка с длинами a и b. Циркулем и линейкой постройте их *среднее геометрическое*, то есть отрезок, длина которого равна $\sqrt{ab}$.

23. Дан единичный отрезок. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки с длинами $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

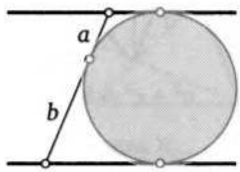
24. Даны отрезки с длинами a, b, c и d. Как циркулем и линейкой построить отрезок, равный $\sqrt{ab+cd}$?

25. Постройте квадрат, равновеликий а) данному прямоугольнику; б) данному четырехугольнику.

26. Точка E — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$. На отрезок AE опустили перпендикуляр BH. На сторону BC опустили перпендикуляр HK. Найдите HK, если $BK=2$, $CK=3$.



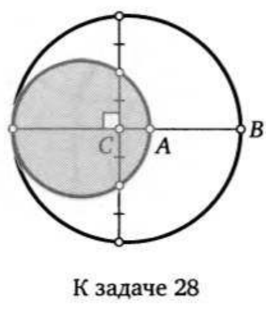
К задаче 26



К задаче 27

27. Окружность касается двух параллельных прямых и секущей, причем точка касания делит секущую на два отрезка с длинами a и b. Найдите радиус окружности.

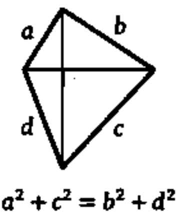
28. Две окружности касаются внутренним образом. Линия их центров вторично пересекает меньшую окружность в точке A, а бóльшую — в точке B. Хорда большей окружности, перпендикулярная прямой AB, пересекает ее в такой точке C, что эта точка и меньшая окружность делят хорду на четыре равные части. Найдите $AC:AB$.



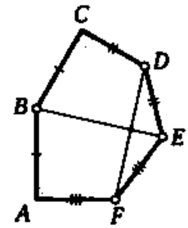
К задаче 28

Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

29. (Теорема о четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями.) а) Диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что суммы квадратов его противоположных сторон равны. б) Докажите обратное утверждение.



К задаче 29

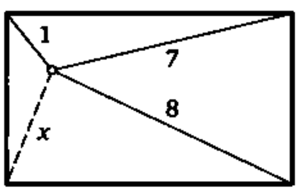


К задаче 31

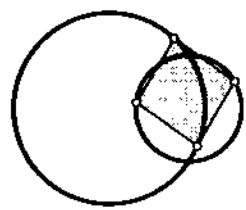
30. Две медианы треугольника перпендикулярны друг другу. Докажите, что его стороны удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=5c^2$.

31. В шестиугольнике $ABCDEF$ углы A и C прямые, причем $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$. Докажите, что прямые BE и FD перпендикулярны.

32. Внутри прямоугольника взяли точку. Оказалось, что расстояния от нее до трех его вершин равны последовательно 1, 7 и 8. Найдите расстояние от данной точки до четвертой вершины.



К задаче 32



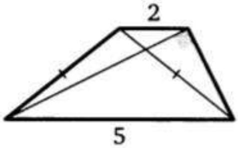
К задаче 33

33. Радиусы двух окружностей равны 5 и 20, а расстояние между их центрами — 16. Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся — на другой.

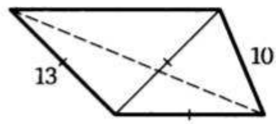
Разные задачи

34. Окружность радиуса 1 разбили на 10 равных частей. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до всех 10 точек деления.

35. Один конец меньшего основания трапеции равноудален от концов ее большего основания, а из другого конца меньшего основания большее основание видно под прямым углом. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 2 и 5.



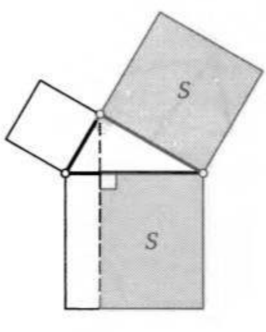
К задаче 35



К задаче 36

36. Одна вершина трапеции удалена от трех других ее вершин на расстояние 13. Найдите диагональ трапеции, не выходящую из этой вершины, если другая ее боковая сторона равна 10.

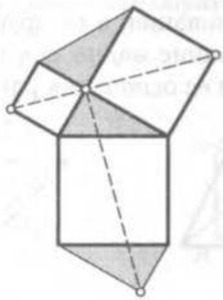
37. (Доказательство Евклида теоремы Пифагора.) Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу треугольника, делит построенный на ней квадрат на два прямоугольника. Докажите, что площади этих прямоугольников равны площадям квадратов, построенных на катетах треугольника. Выведите отсюда теорему Пифагора.



К задаче 37

38. Выразите радиус вписанной в прямоугольный треугольник окружности через его стороны, а его площадь через этот радиус и докажите теорему Пифагора.

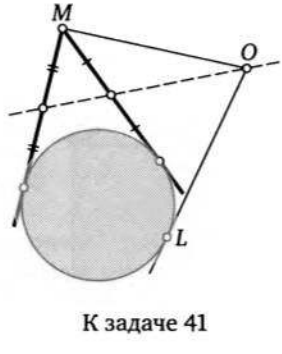
39. Восстановите по чертежу Леонардо да Винчи данное им доказательство теоремы Пифагора.



К задаче 39

40. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, его гипотенуза равна c, а высота, опущенная на гипотенузу, равна h. Докажите, что из отрезков $a+b$, h и $c+h$ можно построить прямоугольный треугольник. Чему равна его гипотенуза?

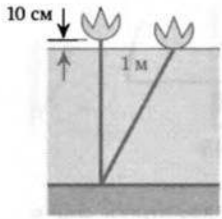
41. Из точки M к окружности проведены две касательные. На прямой, проходящей через середины получившихся отрезков, выбирается любая точка O. Докажите, что длина касательной OL, проведенной из нее к окружности, равна OM.



К задаче 41

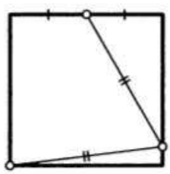
Конфигурационные задачи

42. Цветок лилии возвышается над поверхностью озера на 10 см, а если его потянуть за стебель, он коснется воды в метре от своего прежнего положения. Определите глубину озера в данном месте.



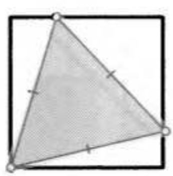
К задаче 42

43. На стороне квадрата взяли точку так, что она равноудалена от одной его вершины и середины соседней стороны (см. рисунок). В каком отношении эта точка делит сторону квадрата?



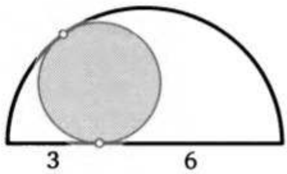
К задаче 43

44. Сторона квадрата равна 1. Найдите сторону равностороннего треугольника, одна вершина которого совпадает с вершиной квадрата, а две другие лежат на его сторонах.

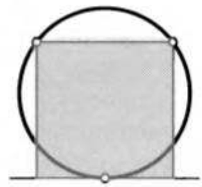


К задаче 44

45. Точка касания окружности, вписанной в полукруг, делит его диаметр на два отрезка с длинами 3 и 6. Найдите радиус этой окружности.



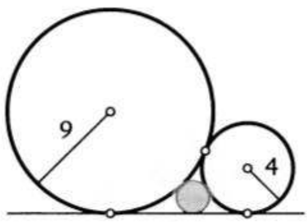
К задаче 45



К задаче 46

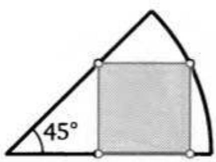
46. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на окружности радиуса 1, а две другие — на касательной к ней.

47. Две окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом. Найдите радиус третьей окружности, касающейся данных, а также их общей внешней касательной. Сколько решений имеет задача?



К задаче 47

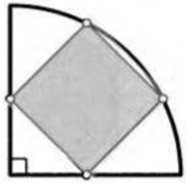
48. В сектор круга радиуса 1 с углом 45° вписан квадрат, так что одна его вершина лежит на окружности. Найдите площадь квадрата.



К задаче 48

49. Квадрат со стороной 1 вписан в окружность. Найдите сторону квадрата, вписанного в один из получившихся сегментов.

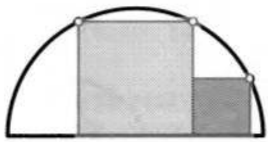
К задаче 49



К задаче 50

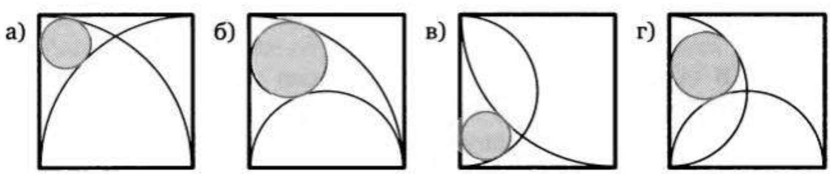
50. В сектор круга радиуса 1 с углом 90° вписали квадрат так, что две его вершины лежат на окружности. Найдите площадь квадрата.

51. Сторона большого квадрата, вписанного в полукруг, равна 1. Найдите сторону маленького квадрата на рисунке.



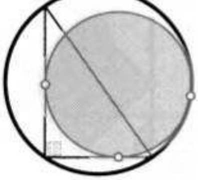
К задаче 51

52. Сторона квадрата равна 1. На рисунках проведены окружности, центры которых лежат либо в вершинах квадрата, либо в серединах его сторон. Найдите радиусы закрашенных окружностей на рисунках.

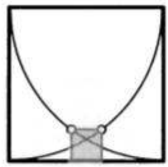


К задаче 52

53. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а его гипотенуза — c. Найдите радиус окружности, которая касается катетов, а также изнутри касается описанной окружности треугольника.



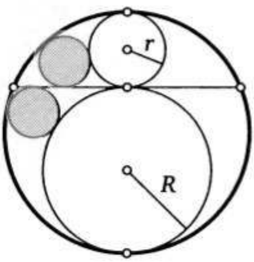
К задаче 53



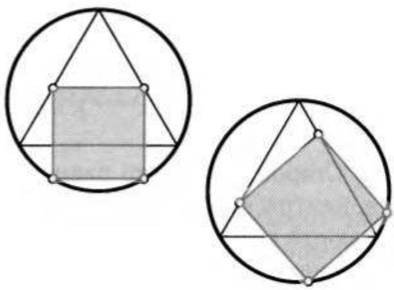
К задаче 54

54. Сторона квадрата равна 1. Найдите сторону закрашенного квадрата на рисунке.

55. (Задача Архимеда.) Хорда делит круг на два сегмента. В каждый из них вписано по окружности, касающейся ее в середине. Кроме того, в каждый сегмент вписали еще по одной окружности, которые касаются первых двух. Докажите, что их радиусы равны. Найдите их радиус, если радиусы первых двух окружностей равны R и r.



К задаче 55



К задаче 56

***56.** В окружность с радиусом 1 вписан равносторонний треугольник. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на окружности, а две оставшиеся — на двух сторонах треугольника. Обратите внимание на то, что существуют как симметричный, так и несимметричный случаи расположения квадрата!

Ответы и указания

Аксиомы прямой. **3.** 1. **4.** 6. **5.** 1, 4 или 6. **7.** Могут. **8.** 190. **9.** 104. **10.** 43. **12.** AE пересекает прямую. **14.** Аксиома полуплоскостей. **16.** Нельзя. **18.** Нет. **19.** 24 или 210.

Отрезки. **3.** Нет. **5.** 4 см. **6.** $a/2$. **7.** 3,25 см. **8.** 26 : 9. **9.** 1 см или 4 см. **10.** 1,5 см или 3,5 см. **12.** Точка C. **13.** 5 или 11. **14.** 2 или 8. **15.** 4 или 20. **16.** 49,5 см, 46,5 см, 43,5 см или 40,5 см. **17.** 8/3. **19.** В любой точке отрезка между «средними» домами.

Углы. **1.** 75°. **2.** 90°. **4.** 30° или 70°. **6.** 110°. **8.** 60°. **10.** 130° или 50°. **12.** 65°. **13.** 6°. **14.** а) 105°; б) 80°. **15.** 9 ч 12 мин. **17.** ≈22 сек. **18.** 82,5° или 97,5°.

Ломаные, многоугольники. **1.** 0, 1, 2, 3, 5, 7. **2.** 9 или 10. **3.** а) 60; б) 12. **7.** Могут. **8.** Не обязательно. **9.** 170. **10.** 11. **11.** Точка находится во внутренней области. **12.** Может. **14.** 8.

Выпуклые фигуры. **1.** Фигура выпукла, если отрезок, соединяющий любые две точки фигуры, полностью принадлежит этой фигуре. **2.** а) Да; б) да; в) нет. **3.** Прямая разбивает плоскость на две выпуклые области.

Равнобедренный треугольник. **11.** Нет, неверно.

Третий признак равенства треугольников. **4.** Да.

Продолжение медианы на свою длину. **2.** 1 : 2. **5.** 55°. **6.** *Указание*: продлите отрезок, соединяющий основания медиан, на свою длину.

Равенство прямоугольных треугольников. **1.** Могут.

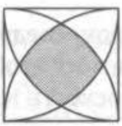
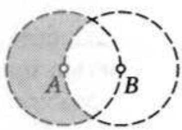
Теорема о большей стороне. **6.** $\angle CBM > \angle ABM$.

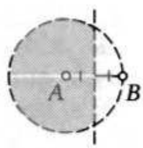
Неравенство треугольника. **3.** 4, 5, 6. **4.** 29. **12.** 3, 4, 5, 6, 7. **13.** Да. **22.** Точка должна быть на пересечении диагоналей. **24.** *Указание*: примените неравенство медианы. **25.** *Указание*: попробуйте «вырезать» меньший треугольник из большего, делая разрезы по прямым линиям. **29.** Может.

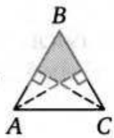
Параллельность. Сумма углов треугольника. **4.** 40°. **7.** 45°, 45°, 90° или 36°, 36°, 72°. **8.** 50° или 70°. **9.** 126°. **10.** 360°. **12.** $90°+\alpha/2$. **13.** 2α. **14.** 150°. **15.** Верно. **16.** Да. **18.** 180°. **19.** 180°. **21.** 90°. **22.** 180°/7. **23.** а) 45°; б) 72°; в) 36°; г) 540°/7. **24.** $90°-\alpha/2$. **25.** $90°+\beta/2$. **27.** а) Да; б) да; в) нет. **28.** *Указание*: подумайте, есть ли другие способы построения параллельной?

Расчет углов в равных треугольниках, дополнительные построения. **2.** 45°. **6.** Верно. **9.** Может. **10.** 45°. **11.** 2. **12.** 60°. **16.** BK.

Геометрические места точек. **2.** а) Прямая является серединным перпендикуляром к AB; б) прямая параллельна серединному перпендикуляру к AB. **4.** Одна. **6.** *Указание*: рассуждайте от противного. **7.** 2.

9. 
10. 

12. 

14. 

16. Луч OK, где O — центр квадрата, K — середина AB. **19.** На двух прямых — биссектрисах двух пар вертикальных углов. **21.** Одна. **22.** Одна.

Знакомство с окружностью. **4.** Нужные точки лежат на одной прямой с центром и с точкой A. **5.** Точка лежит на перпендикуляре, опущенном из центра окружности на прямую. **13.** 6. **25.** а) Нет; б) да. **27.** 80° или 160°. **28.** 40°. **29.** 3. **30.** 45°.

Построения циркулем и линейкой. **12.** Бесконечно много.

Знакомство с симметрией. **4.** Можно. **8.** Например, $y=(x-1)^2$. **13.** 1. **14.** 2. **16.** 2. **23.** Не всегда.

Кратчайшие пути. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 0,5.

Отражения и зеркала. **8.** $360° - 2\alpha$. **9.** 2α. **11.** 18. **12.** 1:3. **13.** 11.

Центральная симметрия. **1.** Можно. **8.** Первый. **14.** Верно. **18.** Нет. **22.** Всегда.

Параллелограммы. **6.** 1:3 или 2:3. **19.** Верно.

Дополнительные построения, связанные с параллелограммом. **2.** Одну. **5.** 1:2. **7.** $a+2b$. **8.** $a+2b$. **9.** Не могут. **10.** 60° и 120°. **14.** 9. **15.** Обязательно.

Трапеция. **1.** Например, трапеза. **2.** Обязательно. **6.** Не существует. **9.** Не более 4 решений. **11.** $b-a$. **12.** Нет. **13.** 60°. **17.** $a+b$. **18.** $a/2$. **20.** $b-a$. **21.** Не могут. **22.** *Указание*: разбейте треугольник на три трапеции. **23.** *Указание*: разбейте данную трапецию на четыре трапеции.

Прямоугольник, ромб, квадрат. **16.** 45°. **17.** 45°. **18.** 60°.

Медиана прямоугольного треугольника. **3.** Четверть окружности. **8.** 3:1. **9.** $(b-a)/2$. **10.** $(a+b)/2$. **11.** $(a+b)/2$.

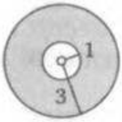
Средняя линия треугольника. **1.** 3. **12.** 60°. **13.** *Указание*: проведите диагональ. **13.** 0,5. **17.** 1 : 3. **20.** $a/2$. **21.** $c/4$. **22.** $(b-a)/2$. **26.** 2:3. **28.** 1:3. **36.** Нет, не могут. **38.** $(a+b-c)/2$.

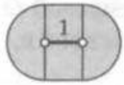
Средняя линия трапеции. **4.** Верно. **5.** $(a-b)/2$. **6.** 1:2. **7.** 0,25. **8.** На прямой, равноудаленной от данных прямых. **9.** *Указание*: проведите диагональ. **11.** $|a+b-c-d|/2$. **12.** а) $(p+q)/2$; б) $|p-q|/2$. **13.** 8. *Указание*: отметьте центр параллелограмма. **15.** 19/32. **16.** *Указание*: отметьте центры параллелограммов.

Медианы треугольника. **2.** Можно. *Указание*: продлите отрезок, соединяющий основания медиан, на свою длину.. **4.** 3 : 2. **5.** 2:1. **6.** 2:1. **8.** 1:2.

Прямоугольный треугольник с углом 30°. **3.** 30°. **4.** 1 : 3. **5.** 3/8. **6.** 1:4. **7.** $2a+b$. **8.** 0,25. **9.** 15°. **10.** 0,5. **12.** 60°. **13.** 2:1.

Теорема Фалеса. **3.** 2/15. **4.** $\frac{2a+b}{3}$ и $\frac{a+2b}{3}$. **5.** 1:2. **6.** 5:7. **7.** 1:2.

Окружность 2. **1.** 

2. 

8. 3,5. **14.** 90°. **15.** 0,5. **16.** 3 : 1. **21.** 3 : 7. **22.** Точка движется по окружности вдвое меньшего радиуса. **35.** Искомые точки лежат на окружности, центр которой находится в середине отрезка, соединяющего центры двух данных окружностей. **37.** 0,25.

Касательные к окружности. **1.** *Указание*: примените рассуждение от противного. **3.** Центр движется по отрезку, параллельному полу. **9.** Две. **11.** 90°. **12.** 120°. **13.** 1:2. **14.** 75° и 105°. **15.** 1,5. **17.** 1. **19.** 1,5. **20.** $(a+c-b)/2$. **21.** 1. **22.** 6. **26.** $|b-a|$. **27.** c. **28.** 6. **31.** 4.

Построение касательных. **15.** Нет, не обязательно.

Касание окружностей. **1.** *Указание*: проведите рассуждение от противного. **3.** $2R$. **5.** 90°. **6.** $R/3$. **7.** 1:3. **11.** $R+r$. **17.** 5:3. **21.** 135°.

Биссектрисы пересекаются в одной точке. **1.** Верно. **3.** $90° + \alpha/2$. **4.** Нет. **6.** Можно. **7.** α. **10.** 0; 2 или 4. **11.** $90° - \alpha/2$. **12.** 2. **13.** 5. **15.** 2,5. **16.** $(a+b)/2$. **18.** 1,5. **21.** 80°.

Вписанные углы. **4.** 30° или 150°. **15.** а) 90°; б) 54°. **25.** 1. **26.** $a+b$. **29.** Верно.

Признаки вписанного четырехугольника. **4.** 90°. **6.** 45°. **7.** 30° или 150°. **33.** 70°. **35.** 135°. **39.** 80° и 100°.

ГМТ с постоянным углом. **3.** Да. **4.** а) Нет; б) может. **7.** Окружность, построенная как на диаметре на отрезке, соединяющем данную точку с центром данной окружности. Концы диаметра не входят в множество. **8.** Объединение кругов с диаметрами OA и OB без их пересечения. **9.** Окружность, построенная как на диаметре на отрезке, соединяющем середины AC и BD без концов этого диаметра. **10.** Все углы треугольника должны быть меньше 120°.

11. Одна. **12.** а) Окружность, симметричная данной относительно прямой AB. **14.** Может, если угол равен 90°. **18.** Не более 2 решений.

Обратный ход. **2.** 100°. **4.** По окружности с центром в вершине угла. **5.** 110°. **6.** 80°. **9.** Одна. **11.** 30°.

Площади. **1.** 144. **2.** а) 3,5; б) 0,5. **4.** $1:3$. **5.** а) $1/6$; б) $1/3$; в) $5/9$. **6.** а) 7; б) 2,5. **10.** $3:4$. **13.** Верно. **14.** Одну. *Указание*: проведите медиану треугольника. **16.** ch. **17.** $3/8$. **18.** Нужные точки делят стороны квадрата в отношении $1:2$. **19.** 3. **25.** 9. **26.** 11. **27.** *Указание*: расположите равные углы как вертикальные. **30.** $S^3/(2a^2b^2)$. **31.** $(5+\sqrt{5})/2$. **32.** $7:2$. **34.** Всего существует 4 такие точки. **36.** а) $1/12$; б) 0,4. *Указание*: примените лемму о «бумажном самолетике». **37.** а) $1/7$; б) $11/60$; в) $1/60$. **38.** 3,4. **39.** 0,5. **41.** $7+3\sqrt{5}$. **42.** $1/2$. **44.** $5/9$. **45.** $1/4$. **46.** 7. **47.** 5. **52.** $1/5$. **53.** $3/4$. **55.** $1/2$. **56.** $2rS^2/abc$.

Применение площадей. **2.** ab/c. **3.** 2,5. **4.** 3,4. **5.** $ab/(a+b)$. **6.** 4,4. **7.** 0,2. **12.** Верно. **14.** $20:27$. **15.** *Указание*: а) воспользуйтесь леммой «о крыльях самолетика»; б) проведите рассуждение от противного. **18.** $4:7$. **21.** Верно. **25.** $60/47$. **26.** 1,5. **30.** 5,9. **31.** $1:6$.

Теорема Пифагора. **2.** Неверно. **4.** 7 метров. **5.** 2,5. **7.** 6. **8.** 13 метров. **10.** $11:21$. **11.** $25/8$. **12.** 5. **13.** $1:3$. **14.** $3:5$. **15.** $\sqrt{2Rh}\sim 4{,}6$ км. **17.** 4. **18.** pq. **19.** 4,8. **20.** $\sqrt{ab}$. **26.** 4. **27.** $\sqrt{ab}$. **28.** $1:3$. **32.** 4. **33.** 13. **34.** 20. **35.** 5,25. **36.** 24. **40.** $c+h$. **42.** 4 м 95 см. **43.** $1:7$. **44.** $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. **45.** 2. **46.** 1,6. **47.** 1,44 или 36. *Указание*: воспользуйтесь задачей 17. **48.** 0,2. **49.** 0,2. **50.** 0,4. **51.** 0,5. **52.** а) $1/6$; б) $1/4$; в) 0,16; г) $2/9$. **53.** $a+b-c$. **54.** 0,2. **55.** $Rr/(R+r)$. **56.** 1 (для симметричного случая) или $\sqrt{\dfrac{3}{4-\sqrt{3}}}$ (для несимметричного случая).

Учебно-методическое издание

Волчкевич Максим Анатольевич

УРОКИ ГЕОМЕТРИИ В ЗАДАЧАХ. 7—8 КЛАССЫ

Подписано к печати 01.02.2016 г. Гарнитура ITC Charter.
Формат 60 × 90/16. Печать офсетная. Объем 13 печ. л.
Тираж 3000 экз. Заказ № 2494.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Отпечатано в ОАО «Тверской полиграфический комбинат»
170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5
Тел. (4822) 44-42-15, (495) 748-04-67. Тел./факс (4822) 55-42-15

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Книга обобщает авторский опыт преподавания геометрии в нескольких московских школах. В ней много рисунков — это сильно экономит время на уроках. Перед каждым параграфом дается справочный материал — формулировки основных теорем и определения.

Материал каждой темы строится по классическому принципу: от простого к сложному. Первые задачи доступны каждому школьнику, последние достигают уровня серьезных математических олимпиад.

Около половины всех задач авторские. Подборка к каждой теме выстроена так, чтобы показать содержащийся в ней метод со всех сторон.

Данная книга составлена именно для работы на уроках, поэтому решений в ней нет, только ответы.

ISBN 978-5-4439-1016-1

9 785443 910161 >

12+